Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2013
Harjoitus 6

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 11.10.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: Ei korjattavia tehtäviä.

Tehtäväsarja I

1. Oletetaan, että A ja B ovat 3×3 -matriiseja, joille pätee $\det(A) = -1/2$ ja $\det(B) = 5$. Määritä
   (a) $\det(AB^{-1})$ (b) $\det(-3B^T)$.

2. Olkoon
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & c & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix},$$
   missä $c \in \mathbb{R}$. Mikä luvun c pitäisi olla, jotta matriisi A ei olisi kääntyvä?

3. Oletetaan, että A on neliömatriisi, jolle pätee $A^2 - 3A + I = O$. Osoita, että matriisi A on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $3I - A$.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 12, joka käsittelee ominaisarvoja.

4. Tutkitaan matriisia $A = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$ Osoita, että $(-1, 2)$ on matriisin A ominaisvektori.

5. Määritä matriisin $B = \begin{bmatrix} -6 & -4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ kaikki ominaisarvot.

6. Jatkoa edelliseen tehtävään. Määritä matriisin B ominaisarvoja vastaavat ominaisvektorit.

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 13.2, joka käsittelee projektioita.

7. Merkitään $\bar{w} = (1, 2)$. Piirrä (ilman laskuja) kuva projektiosta $\text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$, jos
   (a) $\bar{v} = (3, 4)$
   (b) $\bar{v} = (-1, -3)$
   (c) $\bar{v} = (4, -2)$
   (d) $\bar{v} = (-2, -4)$

Piirrä edellisiin kuviin myös erotusvektori $\bar{v} - \text{proj}_{\bar{w}}(\bar{v})$.

8. Tarkista laskemalla, että piirsit projektiovektorit edellisessä tehtävässä oikein.

9. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan lisäksi, että $\|\bar{v}\| = 2$, $\|\bar{w}\| = 3$ ja $\bar{v} \cdot \bar{w} = -1$. Määritä $\|\bar{v} + 2\bar{w}\|$.

Tehtäväsarja IV

10. Etsi kanta avaruuden $\mathbb{R}^4$ aliavaruudelle

$$W = \operatorname{span}((0,1,0,1),(2,-1,2,0),(-4,4,-4,2),(0,2,0,2)).$$

Mikä on W:n dimensio?

11. Jatkoa edelliseen tehtävään. Vektori $(-2,4,-2,2)$ on aliavaruuden W alkio. Mitkä ovat sen koordinaatit edellisessä tehtävässä määrittämäsi kannan suhteen?

Tehtäväsarja V

12. Tutkitaan jälleen matriisia

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}8 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}7 \end{bmatrix},$$

joka kuvaa opiskelijoiden luentokäyttäytymistä (ks. harjoitus 4).

(a) Määritä matriisin ominaisarvot ja niitä vastaavat ominaisvektorit.

(b) Oletetaan, että kurssilla on yhteensä 250 opiskelijaa. Etsi tasapainotila. Toisin sanoen, kuinka monta opiskelijaa pitää olla luennolla ja kuinka monta kotona, jotta tilanne ei muuttuisi seuraavana päivänä? Ominaisarvoista- ja vektoreista on hyötyä.

13. (a) Edellisen tehtävän matriisi A on diagonalisoituva. Diagonalisoi se.

(b) Laske (a)-kohdan avulla potenssi A^7.

(c) Eräällä kurssilla on yhtenä päivänä 100 opiskelijaa luennolla ja 100 opiskelijaa kotona. Missä opiskelijat ovat 7 päivän kuluttua?

14. Piirrä käsitekartta, jossa ovat ainakin seuraavat käsitteet.

alkeisrivitoimitus, determinantti, ekvivalentti, käänteismatriisi, kääntyvä, matriisi, ominaisarvo, ominaisvektori, porrasmatriisi, redusoitu porrasmatriisi, vapaa muuttuja, yhtälöryhmä, täsmälleen yksi ratkaisu

Ylimääräinen tehtävä

15. Sanotaan, että matriisit A ja B *kommutoivat*, jos pätee $AB = BA$.

Tutkitaan 2×2-matriisien joukkoa $\mathbb{R}^{2\times 2}$. Osoita, että ainoat joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisit, jotka kommutoivat kaikkien muiden 2×2-matriisien kanssa, ovat skalaarimatriisit

$$\begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{bmatrix}, \quad \text{missä } a \in \mathbb{R}.$$

Vihje todistuksen toista suuntaa varten: Oleta, että matriisi A kommutoi kaikkien joukon $\mathbb{R}^{2\times 2}$ matriisien kanssa. Tällöin A:n täytyy kommutoida muun muassa matriisien

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

kanssa. Mitä voit tällöin päätellä matriisista A?