Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2013
Harjoitus 5

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 4.10.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 18.10.2013 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Merkitään $\bar{v} = (4, -2)$. Etsi jokin vektorin $\bar{v}$ suuntainen vektori, jonka normi on 6.

Tehtäväsarja II

Mitkä seuraavista väitteistä ovat tosia, mitkä epätosia? Muista, että tällainen väite osoitetaan epätodeksi antamalla vastaesimerkki.
Oletetaan, että A, B ja C ovat matriiseja.

2. Jos AB ja BA ovat määriteltyjä, niin A ja B ovat neliömatriiseja.
3. Jos $AB = O$, niin $A = O$ tai $B = O$.
4. Jos $AB = AC$ ja $A \neq O$, niin $B = C$.
5. Millaisia havaintoja teit matriisien kertolaskusta kahdessa edellisessä tehtävässä? Miten matriisikertolasku eroaaa reaalilukujen kertolaskusta?

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 10, jossa käsitellään käänteismatriisin määrittämistä.

Merkitään $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ ja $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

6. Tutki, onko matriisi C kääntyvä. Jos on, määritä sen käänteismatriisi C^{-1}.
7. Tutki, onko matriisi D kääntyvä. Jos on, määritä sen käänteismatriisi D^{-1}.
8. (a) Kirjoita yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 & + & & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & + & x_2 & & & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \end{cases}$$

muodossa $A\bar{x} = \bar{b}$, missä A on jokin matriisi ja $\bar{x}$ ja $\bar{b}$ ovat vektoreita.

(b) Ratkaise (a)-kohdan yhtälöryhmä edellisten tehtävien ja käänteismatriisin avulla.

9. Oletetaan, että matriisit A ja B ovat kääntyviä. Osoita, että matriisin matriisi AB on kääntyvä näyttämällä, että sen käänteismatriisi on $B^{-1}A^{-1}$.

Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 11, joka käsittelee determinanttia.

10. Laske $\det(A)$, jos

$$\text{(a)}\quad A = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(b)}\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(c)}\quad A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 0 \\ -3 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

11. Mitkä edellisen tehtävän matriiseista ovat kääntyviä? Käytä hyväksesi determinanttia.

12. Oletetaan, että A ja B ovat 4×4 -matriiseja, joille pätee $\det(A) = 3$ ja $\det(B) = -2$. Määritä

$$\text{(a)}\quad \det(AB) \qquad \text{(b)}\quad \det(2A).$$

Tehtäväsarja V

13. Joukko $W = \{(3a + b,\ b,\ -3a + 5b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ eräiden vektoreiden virittämä aliavaruus. Etsi aliavaruudelle kantavektorit ja määritä aliavaruuden W dimensio.

14. Joukko $U = \{(-a - b,\ a + b,\ 2a + b - c) \mid a, b, c \in \mathbb{R}\}$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ eräiden vektoreiden virittämä aliavaruus. Määritä aliavaruuden U dimensio.

15.* Oletetaan, että $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3 \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan, että jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on vapaa. Osoita, että jono $(\bar{v}_1 - \bar{v}_2,\ \bar{v}_2 - \bar{v}_3,\ \bar{v}_3)$ on vapaa. Muista perustella vastauksesi huolellisesti.

Ylimääräinen tehtävä

16. Olkoon $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Oletetaan, että matriisi $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ on kääntyvä. Oletetaan myös, että avaruuden $\mathbb{R}^m$ jono $(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ on vapaa. Osoita, että jono $(A\bar{v}_1, \ldots, A\bar{v}_k)$ on vapaa.