

Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2013
Harjoitus 4

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 27.9.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 11.10.2013 klo 19.30

Tehtäväsarja I

Merkitään $\bar{w}_1 = (-1, -3, 1)$, $\bar{w}_2 = (1, 1, 1)$ ja $\bar{w}_3 = (3, 5, 1)$.

1. Onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa?
2. Virittävätkö vektorit \bar{w}_1 , \bar{w}_2 ja \bar{w}_3 avaruuden \mathbb{R}^3 ?

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 8, joka käsittelee kantaa ja koordinaatteja.

Merkitään $\bar{v}_1 = (1, 1)$ ja $\bar{v}_2 = (2, 3)$.

3. Osoita, että jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ on avaruuden \mathbb{R}^2 kanta. Muista perustella vastauksesi huolellisesti.
4. Määritä vektorin $\bar{a} = (2, 4)$ koordinaatit kannan \mathcal{B} suhteen.
5. Määritä vektori $\bar{w} \in \mathbb{R}^2$, jonka koordinaatit kannan \mathcal{B} suhteen ovat -4 ja -6 .
6. Määritä piirtämällä, ilman laskuja, vektori $\bar{u} \in \mathbb{R}^2$, jonka koordinaatit kannan \mathcal{B} suhteen ovat 3 ja -2 .

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 9, joka käsittelee matriiseja.

Merkitään

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}.$$

7. Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä:

$$A + C, \quad B - C, \quad -2B + 3C.$$

8. Laske seuraavista matriiseista ne, jotka ovat määriteltyjä:

$$BC, \quad CA, \quad AC, \quad A^3, \quad B^5.$$

9. Merkitään $D = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ ja $E = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. Osoita, että matriisin D käänteismatriisi on E .
Päättele tästä, että matriisi D on kääntyvä.

Tehtäväsarja IV

- 10.* Anna esimerkki vektoreista $\bar{v}_1, \bar{v}_2 \in \mathbb{R}^n$, joilla jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{0})$ on vapaa, tai osoita, että sellaisia ei ole.
11. Laadi käsitekartta, jossa esiintyvät ainakin alla olevat käsitteet. Selitä kartassasi käsitteiden väliset yhteydet.
- aliavaruus, kanta, koordinaatti, lineaarisesti riippumattomat, sidottu, suora, taso, vapaa, virittäjä*
12. Joukko $W = \{(5s, -3s, 2s) \mid s \in \mathbb{R}\}$ on erään vektorin virittämä aliavaruus. Etsi sille jokin virittäjävektori.
13. Joukko $W = \{(s+2t, 4s+t, -t) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$ on kahden vektorin virittämä aliavaruus. Määritä jotkin sen virittäjävektorit.

Tehtäväsarja V

14. Erään yhtälöryhmän matriisi on saatu alkeisrivitoimituksilla muotoon

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & a & b+3 \end{array} \right].$$

Määritä ne reaalityöt a ja b , joilla yhtälöryhmällä on

- a) täsmälleen yksi ratkaisu b) äärettömän monta ratkaisua.

Tehtäväsarja VI

15. Opiskelijoiden päivittäinen luentokäyttäytyminen riippuu edellisestä päivästä seuraavasti:
- Opiskelijoista, jotka olivat edellisenä päivänä luennolla, on seuraavana päivänä luennolla 80 % ja kotona 20 %.
 - Opiskelijoista, jotka olivat edellisenä päivänä kotona, on seuraavana päivänä luennolla 30 % ja kotona 70 %.
- (a) Eräänä päivänä luennolla oli 200 opiskelijaa ja kotona 60 opiskelijaa. Kuinka monta opiskelijaa oli luennolla seuraavana päivänä? Entä kotona?
- (b) Laske matriisitulo

$$\begin{bmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 200 \\ 60 \end{bmatrix}.$$

Miten se liittyy a)-kohdan laskuihin?

- (c) Selvitä matriisikertolaskun avulla, missä opiskelijat ovat kolmen päivän kuluttua, kun lähtötilanne on sama kuin a)-kohdassa.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Voit korvata sillä minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

16. Olkoon $m \in \{1, 2, \dots\}$. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{w} \in \mathbb{R}^m$ ja \bar{w} on vektoreiden $\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k$ lineaarikombinaatio. Osoita, että

$$\text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k) = \text{span}(\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_k, \bar{w}).$$

Neuvo: Osoita joukot samoiksi näyttämällä, että kumpikin on toisen osajoukko.