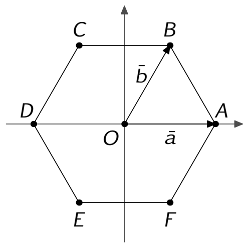
Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2013
Harjoitus 3

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 20.9.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 4.10.2013 klo 19.30

Tehtäväsarja I

1. Oheisessa kuvassa pisteet $A, B, \ldots, F$ ovat säännöllisen kuusikulmion kärkipisteitä. Lausu vektorien $\bar{a}$ ja $\bar{b}$ lineaarikombinaationa suuntajanat $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ ja $\overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FA}$.



2. Merkitään $\bar{v}_1 = (-3, 4)$, $\bar{v}_2 = (1, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (\frac{3}{2}, -2)$. Piirrä kuvat aliavaruuksista $\mathrm{span}(\bar{v}_1)$, $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ ja $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_3)$. Vastausta ei tarvitse perustella täsmällisesti.

Tehtäväsarja II

3.* Merkitään $\bar{w} = (2, 11, 5)$, $\bar{v}_1 = (-2, 1, 1)$, $\bar{v}_2 = (2, 3, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (-2, -1, 0)$. Halutaan tutkia, päteekö $\bar{w} \in \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Millaista yhtälöä pitää tutkia? Millainen yhtälöryhmä siitä saadaan? Perustele vastauksesi.

   Kun luennoitsija muokkasi yhtälöryhmän matriisin redusoiduksi porrasmatriisiksi, oli tuloksena

$$\left[\begin{array}{ccr|c} 1 & 0 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   Päättele tämän perusteella, päteekö $\bar{w} \in \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$. Perustele vastauksesi.

4. Merkitään $\bar{v}_1 = (0, 0, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$.
   (a) Oletetaan, että $\bar{a} \in \mathbb{R}^3$. Osoita, että $\bar{a} \in \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.
   (b) Päättele edellisen perusteella, että vektorit $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ virittävät avaruuden $\mathbb{R}^3$.

5. Oletetaan, että $\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k \in \mathbb{R}^n$. Oletetaan lisäksi, että $\bar{w} \in \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$ ja $a \in \mathbb{R}$. Osoita, että $a\bar{w} \in \mathrm{span}(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_k)$.

Tehtäväsarja III

6. Laboratoriossa viljellään eräässä koeputkessa kolmea bakteerikantaa (I, II ja III). Koeputkeen lisätään päivittäin 2 300 yksikköä ravintoa A, 800 yksikköä ravintoa B ja 1 500 yksikköä ravintoa C. Yksittäisen bakteerin päivässä kuluttamien ravintoyksiköiden määrä näkyy seuraavasta taulukosta:

	A	B	C
Bakteerikanta I	2	1	1
Bakteerikanta II	2	2	3
Bakteerikanta III	4	0	1

Ravinnon määrä rajoittaa bakteerikantojen kasvua. Jos bakteerit kuluttavat kaiken ravinnon, kuinka monta bakteeria kustakin kannasta voi elää koeputkessa? Muodosta tilannetta kuvaava yhtälöryhmä ja ratkaise se.

7.* Erään yhtälöryhmän matriisia on muokattu alkeisrivitoimituksilla päätyen alla olevaan matriisiin. Päättele suoraan matriisin perusteella, kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 100 & -1 & 5 & b \\ 0 & -5 & a & 4 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right], \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 7, joka käsittelee vapautta.

8. Tutki vapauden määritelmän avulla, onko jono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vapaa, jos $\bar{v}_1 = (1, 5)$ ja $\bar{v}_2 = (-5, -1)$. Havainnollista tilannetta kuvalla.

9. Onko vektorijono $(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$ vapaa, jos $\bar{v}_1 = (3, 1)$ ja $\bar{v}_2 = (-6, -2)$? Havainnollista tilannetta kuvalla.

10. Merkitään $\bar{w}_1 = (1, 1, 1)$, $\bar{w}_2 = (1, 2, 3)$ ja $\bar{w}_3 = (1, -1, 2)$. Onko jono $(\bar{w}_1, \bar{w}_2, \bar{w}_3)$ vapaa?

Tehtäväsarja V

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 8, joka käsittelee kantaa.

11. Merkitään $\bar{v}_1 = (0, 0, 1)$, $\bar{v}_2 = (0, 1, 1)$ ja $\bar{v}_3 = (1, 1, 1)$. Osoita, että jono $\mathcal{B} = (\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$ on avaruuden $\mathbb{R}^3$ kanta. Voit käyttää hyväksesi aiempia tehtäviä.

Tehtäväsarja VI

Jatka tutustumista vektorien pistetuloa käsittelevään lukuun 13.

12. Mitkä seuraavista vektoreista ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan? Muista käyttää kohtisuoruuden määritelmää!
$$\bar{a} = (1, 2), \quad \bar{b} = (-4, 2), \quad \bar{c} = (3, 3)$$
Piirrä tilannetta havainnollistava kuva.

13. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $\|\bar{v}\| = 2$, $\|\bar{w}\| = 3$ ja $\bar{v} \cdot \bar{w} = -1$. Merkitään $\bar{a} = 3\bar{v} - \bar{w}$ ja $\bar{b} = \bar{v} + \bar{w}$. Määritä $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Voit korvata sillä minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

14. Millainen avaruuden $\mathbb{R}^3$ osajoukko on vektoreiden $\bar{v}_1 = (1, -2, -6)$, $\bar{v}_2 = (0, 3, 6)$ ja $\bar{v}_3 = (-1, -1, 0)$ virittämä aliavaruus $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$? Onko se suora, taso vai jotain muuta? Perustele.