Lineaarialgebra ja matriisilaskenta I
Helsingin yliopisto, matematiikan ja tilastotieteen laitos
Syksy 2013
Harjoitus 2

Tehtävien viimeinen palautuspäivä: pe 13.9.2013 klo 19.30
Korjausten viimeinen palautuspäivä: pe 27.9.2013 klo 19.30

Ylimääräisellä tehtävällä 15 voi korvata minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

Tehtäväsarja I

1. Onko piste $(2, 3, 1)$ suoralla $S = \{(4, 1, -1) + k(-2, 1, -1) \mid k \in \mathbb{R}\}$? Entä piste $(10, -2, 2)$?

2. Tutkitaan suoraa, jonka yhtälö on $y = -2x + 4$. Kirjoita suora muodossa $\{\bar{p} + t\bar{v} \mid t \in \mathbb{R}\}$ ja piirrä tilannetta havainnollistava kuva.

Tehtäväsarja II

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 4, jossa käsitellään vektorien virittämiä aliavaruuksia.

3. Tutki seuraavissa tapauksissa, onko vektori $\bar{a}$ vektorien $\bar{v}_1 = (1, -2)$ ja $\bar{v}_2 = (-3, 2)$ lineaarikombinaatio. Toisin sanoen selvitä, päteekö $\bar{a} \in \mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$.

   (a) $\bar{a} = (-2, 0)$ (b) $\bar{a} = (-3, 0)$.

4.* Oletetaan, että $s, t \in \mathbb{R}$. Kuuluuko vektori $\bar{b} = (s - 3t,\ -2s + 2t)$ vektorien $\bar{v}_1 = (1, -2)$ ja $\bar{v}_2 = (-3, 2)$ virittämään aliavaruuteen $\mathrm{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2)$?

Tehtäväsarja III

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 5, joka käsittelee lineaarisia yhtälöryhmiä.

5. Muuta matriisi
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 8 \end{array}\right]$$
alkeisrivitoimituksilla ensin porrasmatriisiksi ja sen jälkeen redusoiduksi porrasmatriisiksi.

6. Ratkaise Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmän ja edellisen tehtävän avulla yhtälöryhmä
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 \phantom{{}+3x_3} = 8. \end{cases}$$

7. Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty alla oleviin matriiseihin. Määritä yhtälöryhmien ratkaisut.

   (a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$ (b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

8. Ratkaise Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2x_1 &+& x_2 &+& 4x_3 &=& 3 \\ & & 2x_2 &-& 4x_3 &=& 1 \\ x_1 &+& &+& 3x_3 &=& 0 \\ 4x_1 &+& &+& 12x_3 &=& 2. \end{cases}$$

9.* Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä on päädytty matriisiin

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 0 & 0 & -6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Kuinka monta ratkaisua yhtälöryhmällä on? Määritä ratkaisut. (Muista kirjoittaa vastauksesi huolellisesti!)

Tehtäväsarja IV

Tutustu kurssimateriaalin lukuun 6, joka käsittelee virittämistä.

10. Merkitään $\bar{v}_1 = (2, 0, 1, 4)$, $\bar{v}_2 = (1, 2, 0, 0)$, $\bar{v}_3 = (3, 1, 0, 2)$ ja $\bar{v}_4 = (4, -4, 3, 12)$. Halutaan tietää, kuuluuko vektori $\bar{v}_4$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_3$ virittämään aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$.
    (a) Millaista vektoriyhtälöä on tutkittava? Millainen yhtälöryhmä yhtälöstä saadaan?
    (b) Ratkaise edellisen tehtävän yhtälöryhmä Gaussin-Jordanin eliminointimenetelmällä.
    (c) Päteekö $\bar{v}_4 \in \operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3)$?
11. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kuuluuko vektori $\bar{v}_3$ vektoreiden $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ja $\bar{v}_4$ virittämään aliavaruuteen $\operatorname{span}(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_4)$? (Muista, että pelkät laskut eivät riitä, vaan sinun on selitettävä, mitä teet. Voit ottaa mallia edellisen tehtävän rakenteesta. Yhtälöryhmän ratkaisun saat tehtävästä 8.)

Tehtäväsarja V

12. Oletetaan, että $\bar{v}, \bar{w} \in \mathbb{R}^n$ ja $c \in \mathbb{R}$. Osoita yhteenlaskun ja skalaarikertolaskun määritelmien nojalla, että $c(\bar{v} + \bar{w}) = c\bar{v} + c\bar{w}$.

Tehtäväsarja VI

Ryhdy tutustumaan kurssimateriaalin lukuun 13, jossa käsitellään vektorien pistetuloa ja normia.

13. Merkitään $\bar{v} = (-2, 1)$ ja $\bar{w} = (3, 4)$. Määritä pistetulo $\bar{v} \cdot \bar{w}$ ja normi $\|\bar{v}\|$.
14. Viivakoodit muodostuvat kahdestatoista numerosta, jotka ovat välillä 0–9. Voidaan ajatella, että viivakoodit ovat 12-ulotteisia vektoreita. Viivakoodin $\bar{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_{11}, d)$ yksitoista ensimmäistä numeroa sisältävät tuotteen tiedot. Viimeinen numero d on niin sanottu tarkistusnumero. Tarkistusnumeron määrittämiseen käytetään kontrollivektoria

    $$\bar{c} = (3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1, 3, 1).$$

    Tarkistusnumero valitaan niin, että pistetulo $\bar{u} \cdot \bar{c}$ on kymmenellä jaollinen.

    Mikä on viivakoodin $\bar{u} = (0, 7, 4, 9, 2, 7, 0, 2, 0, 9, 4, d)$ tarkistusnumero d?

Ylimääräinen tehtävä

Seuraava tehtävä on hieman haastavampi. Voit korvata sillä minkä tahansa tähdettömän tehtävän.

15. Oletetaan, että $\bar{u}, \bar{w}, \bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Osoita, että $\bar{u}$, $\bar{v}$ ja $\bar{w}$ ovat aliavaruuden $\operatorname{span}(\bar{u},\ \bar{u} + \bar{v},\ \bar{u} + \bar{w} + \bar{v})$ alkioita.