Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I

2. Kurssikoe 16.12.2013

Laske **neljä** seuraavista tehtävistä.

1. Määrää seuraavien integraalien arvot.

a) $\int_\gamma \frac{1}{z^3}\,dz, \qquad \gamma(t) = e^{t^2+i3\pi t^{1/2}}, \quad t \in [0,1].$

b) $\int_\gamma \cos(z^2)\,dz, \qquad \gamma(t) = e^{2\pi i t}, \quad t \in [0,1].$

Ratkaisu

a: Nyt alueessa $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ funktiolla $\frac{1}{z^3}$ on integraalifunktio $F(z) = -\frac{1}{2z^2}$. Koska polku $\gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ on C^1-polku tällöin pätee

$$\int_\gamma \frac{1}{z^3}\,dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = -\frac{1}{2e^{2+6i}} + \frac{1}{2}.$$

b: Nyt funktio $\cos(z^2)$ on kahden koko tasossa analyyttisen funktion yhdisteenä analyyttinen koko tasossa ja γ on suljettu C^1-käyrä. Täten Cauchyn integraalilauseen nojalla

$$\int_\gamma \cos(z^2)\,dz = 0.$$

2. Etsi konformikuvaus $f : \Omega \to D(0,1)$, kun $D(0,1)$ on yksikkökiekko ja $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \arg(z) \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})\}$.

Ratkaisu

Käytetään ensin kuvausta z^2 joka on konforminen alueessa Ω ja kuvaa sen oikeaksi puolitasoksi. Osoitetaan seuraavaksi, että Möbius kuvaus $f(z) = \frac{iz-i}{iz+i}$ kuvaa oikean puolitason yksikkökiekoksi. Tätä varten riittää osoittaa että kolme pistettä oikean puolitason reunalta kuvautuvat yksikkökiekon reunalle ja että jokin oikean puolitason piste kuvautuu yksikkökiekolle. Valitaan pisteiksi $0, i, -i, 1$ ja lasketaan, saadaan $f(0) = -1$, $f(i) = i$, $f(-i) = -i$ ja $f(1) = 0$.

Tällöin yhdistetty kuvaus $h(z) = f \circ z^2$ kuvaa alueen Ω yksikkökiekolle ja on konforminen, sillä molemmat sen muodostavista funktioista ovat konformisia määrittelyalueessaan.

3. Todista *minimiperiaate*: Olkoon $A \subset \mathbb{C}$ on rajoitettu alue ja $f : A \to \mathbb{C}$ on analyyttinen funktio, jolle $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in A$. Oletetaan myös, että f ei ole vakio ja että $f : \overline{A} \to \mathbb{C}$ on jatkuva.

Osoita, että silloin: $|f(z)| > \min_{\zeta \in \partial A} |f(\zeta)|$ kaikilla $z \in A$.

[Vihje: voit olettaa tunnetuksi luennoilla todistetut asiat.]

Ratkaisu

Jos $f(z_0) = 0$ jollain pisteellä $z_0 \in \partial A$ niin väite on selvä, voidaan siis jatkossa olettaa että näin ei ole.

Tutkitaan nyt funktiota $\frac{1}{f(z)}$ alueessa A. Koska $f(z) \neq 0$ ja f analyyttinen kyseinen funktio on analyyttinen ja koska $f(z)$ ei vakio niin myös $\frac{1}{f(z)}$ ei vakio.

Funktio $\frac{1}{f(z)}$ on jatkuva sulkeumassa $\bar{A}$, koska f oli ja $f(z) \neq 0$ kaikilla $z \in \bar{A}$. Koska lisäksi alue A rajoitettu voidaan nyt käyttää maksimiperiaatteen vahvaa muotoa ja saadaan

$$\frac{1}{\mid f(z_0) \mid} > \frac{1}{\mid f(z) \mid} \text{ jollain } z_0 \in \partial A, \text{ kaikilla } z \in A,$$

ja tästä saadaan

$$\mid f(z) \mid > \mid f(z_0) \mid$$

mikä todistaa väitteen.

4. Mikä integraalin $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+3z}\, dz$ arvo, kun $\gamma(t) = 1 + re^{2\pi i t}$, $0 \leq t \leq 1$, missä

a) $r = 1/3$, b) $r = 3$, c) $r = 9$.

Ratkaisu

a: Huomataan että $\frac{\cos(z)}{z^2+3z} = \frac{\cos(z)}{z(z+3)}$, eli funktio on analyyttinen alueessa $A = \mathbb{C} \setminus \{0, -3\}$. Nyt kun $r = \frac{1}{3}$ huomataan että $B(1, \frac{1}{3}) \subset \bar{B}(1, \frac{1}{2}) \subset A$, joten Cauchyn integraalilauseen nojalla

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+3z}\,dz = 0.$$

b: Nyt origo kuuluu kuulaan $B(1, 3)$ ja toinen nollakohta -3 ei kuulu edes kuulaan $B(1, \frac{10}{3})$, joten funktio $\frac{\cos z}{z+3}$ on analyyttinen esimerkiksi kuulassa $B(1, \frac{10}{3})$. Siis voidaan laskea integraali käyttäen Cauchyn integraalikaavaa,

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+3z}\,dz = 2\pi i \frac{1}{3} = \frac{2\pi i}{3}.$$

c: Nyt molemmat nollakohdat kuuluvat kuulaan $B(1, 9)$, joten tulee joko käyttää polkujen deformointia tai osamurtohajotelmaa. Ratkaistaan tehtävä tässä deformaatiota käyttäen.

Valitaan sykli joka koostuu b-kohdan ympyräkaaresta ja kiekon $B(-3, \frac{1}{3})$ reunasta positiivisesti suunnistettuna, merkitään näitä käyriä γ_1 ja γ_2 ja näiden yhdisteen muodostamaa sykliä σ. Koska kierrosluku pisteiden $\{-3, 0\}$ suhteen on sama molemmissa sykleissä ja funktio on analyyttinen muualla tiedetään että integraali yli kiekon $B(1, 9)$ reunan positiiviseen kiertosuuntaan on sama kuin syklin σ yli. Siis

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+3z}\,dz = \int_{\gamma_1} \frac{\cos(z)}{z^2+3z}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{\cos(z)}{z^2+3z}\,dz.$$

Nyt ensimmäinen integraali on laskettu kohdassa b ja saatu $\int_{\gamma_1} \frac{\cos(z)}{z^2+3z}\,dz = \frac{2\pi i}{3}$.

Täysin vastaavasti Cauchyn integraalikaavaa käyttäen voidaan laskea myös jälkimmäinen integraali ja saadaan $\int_{\gamma_2} \frac{\cos(z)}{z^2+3z}\,dz = \frac{2\pi i \cos(-3)}{-3}$ ja täten saadaan

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2+3z}\,dz = \frac{2\pi i}{3}(1 - \cos 3).$$

5. Laske integraali $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx.$

Ratkaisu

Tutkitaan integraalia yli puolikiekon reunan γ_R joka kulkee pisteiden $R, -R, iR$ läpi funktiosta $\frac{1}{z^2-2z+5}$. Huomataan että kun $R \to \infty$ niin integraali yli reaaliakselin lähestyy haluttua integraalia. Lasketaan nyt missä funktio $\frac{1}{z^2-2z+5}$ ei ole analyyttinen. Toisen asteen yhtälö ratkaisemalla saadaan nimittäjälle nollakohdat $1+2i$ ja $1-2i$. Nyt suurilla R piste $1+2i$ kuuluu puoliympyrään jonka reuna on γ_R. Nyt polkujen deformontilauseen nojalla integraali yli γ_R:n on sama kuin integraali yli kuulan $B(1+2i, 1)$ reunan γ positiivisesti suunnistettuna, sillä kierrosluvut pisteiden $1 \pm 2i$ ovat samat molemmilla ja $\frac{1}{z^2-2z+5}$ on analyyttinen muualla. Täten voidaan laskea suurilla R Cauchyn integraalikaavaa käyttäen

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2-2z+5}\,dz = \int_{\gamma} \frac{1}{(z-(1+2i))(z-(1-2i))}\,dz = \frac{2\pi i}{1+2i-(1-2i)} = \frac{\pi}{2}.$$

Nyt arvioidaan ympyränkaarta $\bar{\gamma}_R$ kun $R \to \infty$. Nyt voidaan arvioida

$$\mid \int_{\bar{\gamma}_R} \frac{1}{z^2-2z+5}\,dz \mid \leq \pi R \frac{1}{\mid R^2 \mid -2 \mid R \mid -5} \to 0,$$

kun $R \to \infty$. Ja koska

$$\int_{\gamma_R} \frac{1}{z^2-2z+5}\,dz = \int_{-R}^{R} \frac{1}{z^2-2z+5}\,dz + \int_{\bar{\gamma}_R} \frac{1}{z^2-2z+5}\,dz = \frac{\pi}{2},$$

pätee

$$\int_{-R}^{R} \frac{1}{z^2-2z+5}\,dz \to \frac{\pi}{2}$$

kun $R \to \infty$. Tämä taas osoittaa että

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2-2x+5}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$