Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Kompleksianalyysi I

1. Kurssikoe 28.10.2013
Ratkaisuehdotuksia.

Laske **neljä** seuraavista tehtävistä.

1. a) Määrää luvun $\frac{4}{(3-i)^2}$ reaali- ja imaginääriosat.
b) Ratkaise yhtälö $z^6 = -8$
c) Anna luvun $\sqrt{3} - 3i$ napaesitys.
(Anna laskujen välivaiheet)

Ratkaisu: a: Sievennetään termiä muotoon josta vastaus helppo lukea.

$$\frac{4}{(3-i)^2} = \frac{4(3+i)^2}{(3-i)^2(3+i)^2} = \frac{4(9+6i-1)}{100} = \frac{8}{25} + i\frac{6}{25},$$

mistä nähdään että reaaliosa on $\frac{8}{25}$ ja imaginääriosa on $\frac{6}{25}$.

b: Huomataan ensin että z:n modulille pätee $\mid z \mid^6 = 8$, josta seuraa että $\mid z \mid = \sqrt{2}$. Seuraavaksi muistetaan että z:n argumentille ϕ tulee päteä $6\phi = \pi + 2n\pi$, missä $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Tästä saadaan ehto $\phi = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, missä n kuten edellä.

Yhdistämällä nämä tiedot saadaan $z = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3})}$, missä $n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

c: Lasketaan ensin moduli, $\mid \sqrt{3} - 3i \mid = \sqrt{(3+9)} = 2\sqrt{3}$. Etsitään argumentti väliltä $(-\pi, \pi]$. Muistetaan että määritelmään mukaan argumentti on se reaaliluku ϕ jolle $\cos(\phi) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ ja $\sin(\phi) = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}}{2}$.

Tästä voidaan laskea että argumentti halutulta väliltä on $-\frac{\pi}{3}$. Siis napakoordinaattiesitys on $\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}e^{i\frac{-\pi}{3}}$.

2. Määritellään kompleksinen tangenttifunktio kaavalla $\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)}$. Missä $\tan(z)$ on analyyttinen (perustele lyhyesti). Etsi myös kaikki kompleksiluvut z jotka toteuttavat yhtälön

$$\tan z = 3i.$$

Ratkaisu: Muistetaan että sini-ja kosinifunktiot ovat analyyttisiä koko tasossa. Tällöin tangenttifunktio on analyyttinen alueessa, jossa kosini on erisuuri kuin nolla. Eli $\tan(z)$ on analyyttinen alueessa $\mathbb{C} \setminus \{\frac{\pi}{2} + n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$ (Kosinin nollakohdat laskettu laskuharjoituksissa, ht6:t2, joten kyseistä tietoa saa käyttää suoraan. Vaihtoehtoisesti nollakohdat voi myös laskea).

Lasketaan nyt haluttu yhtälö käyttäen sinin ja kosinin eksponenttimuotoa, jolloin $\tan(z)$ saa muodon

$$\tan(z) = \frac{\sin(z)}{\cos(z)} = \frac{\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})}{\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})}.$$

Lasketaan nyt yhtälö tätä käyttäen,

$$\frac{\frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})}{\frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})} = 3i \leftrightarrow \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = \frac{3i}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$$

Kertomalla tätä puolittain $2i$:llä saadaan yhtälö muotoon

$$e^{iz} - e^{-iz} = -3e^{iz} - 3e^{-iz} \leftrightarrow 4e^{iz} + 2e^{-iz} = 0.$$

Kertomalla tätä e^{iz}:lla ja ryhmittelemällä yhtälö uudelleen saadaan

$$e^{2iz} = -\frac{1}{2}.$$

Tästä saadaan

$$2iz = \log(-\frac{1}{2}) = \log(\frac{1}{2}) + i\pi + 2ni\pi,$$

joten lopulta saadaan

$$z = -\frac{i}{2}\log(\frac{1}{2}) + \frac{\pi}{2} + n\pi.$$

3. a) Etsi kaikki mahdolliset arvot luvulle $(3i)^{2i}$.

b) Määrää potenssifunktiolle $f(z) = z^{2i}$ haara joukossa $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$, jolle pätee $|f(3i)| = e^{3\pi}$.

Ratkaisu: a: Lasketaan käyttäen yleisen potenssifunktion määritelmää,

$$(3i)^{2i} = e^{2i\log(3i)} = e^{2i(\log(3)+i\frac{\pi}{2}+2ni\pi)} = e^{2i\log(3)-\pi-4n\pi},$$

missä $n \in \mathbb{Z}$.

b: Lasketaan samoin kuin yllä

$$z^{2i} = e^{2i\log(z)} = e^{2i(\log(|z|)+i\arg(z)+2in\pi)},$$

missä $\arg(z)$ on z:n argumentti rajoitettuna välille $(-\pi, \pi]$. Nyt on valittava haluttu haara kiinnittämällä n siten että $\mid (3i)^{2i} \mid = e^{3\pi}$. Nyt kohdassa a lasketun nojalla

$$\mid (3i)^{2i} \mid = e^{-\pi-4n\pi},$$

josta nähdään että ehdon toteuttamiseksi on valittava haara joka saadaan valitsemalla $n = -1$.

4. a) Määrää ne luvut $a \in \mathbb{R}$ joilla funktio

$$f(x+iy) = e^{-y}\sin(x) + i\,a\,e^{-y}\cos(x)$$

on analyyttinen koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$.

b) Onko funktiolla $f(z) = z\mathrm{Re}z$ kompleksista derivaattaa missään pisteessä ? Jos on, niin missä ?
(Perustele lyhyesti)

Ratkaisu: a: Käytetään Cauchy-Riemannin yhtälöitä ja lasketaan tätä varten reaali- ja imaginääriosien osittaisderivaatat. Ensinnäkin reaaliosa $u(x,y) = e^{-y}\sin(x)$ ja imaginääriosa $v(x,y) = ae^{-y}\cos(x)$, josta laskemalla saadaan.

- $u_x = e^{-y}\cos(x)$
- $u_y = -e^{-y}\sin(x)$
- $v_x = -ae^{-y}\sin(x)$
- $v_y = -ae^{-y}\cos(x)$

Selvästi sekä u että v ovat differentioituvia kaikkialla, joten ainoaksi ehdoksi jää tarkistaa millä vakion a arvolla Cauchy-Riemann yhtälöt pätevät. Tarkistetaan yhtälöt, $u_x = v_y \leftrightarrow e^{-y}\cos(x) = -ae^{-y}\cos(x)$, josta saadaan että $a = -1$. Tarkistetaan toteutuuko toinenkin yhtälö tällä valinnalla, $u_y = -v_x \leftrightarrow -e^{-y}\sin(x) = ae^{-y}\sin(x)$, joka pätee kun $a = -1$. Siis funktio on analyyttinen koko tasossa ainoastaan kun $a = -1$.

b: Käytetään jälleen Cauchy-Riemann yhtälöitä. Tällä kertaa $f(z) = z\text{Re}z = (x+iy)x = x^2 + iyx$, joten $u(x,y) = x^2$ ja $v(x,y) = yx$. Lasketaan jälleen osittaisderivaatat,

- $u_x = 2x$
- $u_y = 0$
- $v_x = y$
- $v_y = x$

Tarkistetaan pätevätkö yhtälöt, $u_x = v_y \leftrightarrow 2x = x$, josta seuraa $x = 0$. Vastaavasti $u_y = -v_x \leftrightarrow y = 0$. Nämä ehdot ovat yhtäaikaa voimassa vain origossa, joten koska u ja v differentioituvia origossa saadaan että $f(z)$:lla on kompleksinen derivaatta ainoastaan origossa.

5. Todista Abelin lause seuraavassa muodossa: Jos sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ suppenee, osoita että silloin sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ suppenee itseisesti aina kun $|z| < |w|$.

Ratkaisu: Koska sarja $\sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$ suppenee on olemassa reaaliluku M siten että $\mid a_n w^n \mid < M$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Nyt jos $\mid z \mid < \mid w \mid$ niin pätee
$\mid a_n z^n \mid = \mid a_n w^n (\frac{z^n}{w^n}) \mid \leq M \mid q \mid^n$, missä $q = \frac{z}{w}$ ja $\mid q \mid < 1$. Tällöin sarja

$$\sum_{n=0}^{\infty} M \mid q \mid^n$$

suppenee qeometrisenä sarjana ($\mid q \mid < 1$) ja majoroi sarjaa

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mid a_n z^n \mid,$$

joten myös tämä sarja suppenee, mikä todistaa väitteen.