

# Kompleksianalyysi I

Helsingin yliopisto  
Matematiikan ja tilastotieteen laitos  
Syyslukukausi 2013

Kari Astala

Teksti hyödyntää myös Pekka Niemisen ja Ritva Hurri-Syrjäsen aikaisempia muistiinpanoja.

Kuvat: Martti Nikunen

Funktioteorian eli kompleksianalyysin kurssin teemoina ovat a) kompleksiluvut  $\mathbb{C}$  eli luvut muotoa  $z = x + iy$ , jossa  $x, y \in \mathbb{R}$  ja  $i^2 = -1$ , b) kompleksimuuttujan (derivoituvat) funktiot  $f(z)$  ja c) näiden analyysi.

Matematiikan peruskursseilla opittuun reaaliomuuttujan funktioiden analyysiin verrattuna kompleksianalyysi on teoriana kauniimpi ja täydellisempi. Lisäksi sillä on vahva yhteys geometriaan, koska kompleksiluvut  $\mathbb{C}$  voidaan samaistaa tason  $\mathbb{R}^2$  pisteiden kanssa.

Lisätietoja kurssin aihepiiristä saa esimerkiksi seuraavista kirjoista, jotka kaikki menevät pitemmälle kuin tämä kurssi:

- J. B. CONWAY: *Functions of One Complex Variable I* (2nd ed.), Springer, 1978.
- R. E. GREENE & S. G. KRANTZ: *Function Theory of One Complex Variable* (2nd ed.), AMS, 2002.
- O. LEHTO: *Funktioteoria I–II*, Limes ry, 1982.
- B. PALKA: *An Introduction to Complex Function Theory*, Springer, 1991.
- W. RUDIN: *Real and Complex Analysis* (3rd ed.), McGraw-Hill, 1987.

Lehdon luentomuistiinpanoja on käytetty kurssilla takavuosina. Mainituista englanninkielisistä oppikirjoista Rudin on ehkä vaativin ja Palka helppolukuisin mutta varsin runsas. Näihin kirjoihin kannattaa tutustua nähdäkseen, mitä funktioteoria kauneimmillaan voi tarjota.

# Sisältö

<b>1 Kompleksitaso</b>	<b>1</b>
Kompleksiluvut . . . . .	1
Moduli ja argumentti . . . . .	4
Moivre'n ja Eulerin kaavat . . . . .	6
Binomiyhtälö napaesityksessä . . . . .	8
<b>2 Kompleksitason topologiaa</b>	<b>10</b>
Metriikka . . . . .	10
Avoimet ja suljetut joukot . . . . .	10
Sisus, reuna ja sulkeuma . . . . .	11
Kompleksilukujonojen suppeneminen . . . . .	12
Funktion raja-arvo . . . . .	13
Funktion jatkuvuus . . . . .	14
Yhtenäisyydestä . . . . .	17
<b>3 Analyttiset funktiot</b>	<b>20</b>
Kompleksinen derivaatta . . . . .	20
Derivointisääntöjä . . . . .	21
Kompleksifunktion kuvausominaisuuksista . . . . .	24
Cauchyn ja Riemannin yhtälöt . . . . .	25
Harmoniset funktiot . . . . .	28
Käänteisfunktion analyttisyys; juurifunktio . . . . .	29
<b>4 Potenssarjat</b>	<b>32</b>
Sarjan suppeneminen . . . . .	32
Potenssarjat ja suppenemissäde . . . . .	32
Hadamardin lause . . . . .	34
Potenssarjan summan analyttisyys . . . . .	35
<b>5 Eksponentti- ja logaritmfunktio</b>	<b>39</b>
Eksponenttifunktio . . . . .	39
Eksponenttifunktion kuvausominaisuuksista . . . . .	41
Logaritmfunktio . . . . .	43
Kompleksinen potenssifunktio . . . . .	44
Täydennys . . . . .	45

<b>6</b>	<b>Konformisuus ja laajennettu taso</b>	<b>46</b>
	Polun tangentti . . . . .	46
	Konformisuus . . . . .	47
	Riemannin pallo . . . . .	49
	Raja-arvot ja jatkuvuus $\bar{\mathbb{C}}$ :ssä . . . . .	51
	Analyyttisyys ja konformisuus $\bar{\mathbb{C}}$ :ssä . . . . .	51
	Möbius-kuvaukset . . . . .	53
	Kaksoissuhde . . . . .	55
	Möbius-ympyrät Möbius-kuvauksessa . . . . .	57
	Alueiden konformikuvaustehtäviä . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Kompleksinen integrointi</b>	<b>64</b>
	Polkuintegraali . . . . .	64
	Integraali kaarenpituuden suhteen . . . . .	67
	Integraalifunktio . . . . .	68
	Goursat'n lemma . . . . .	71
	Cauchyn integraalilause kiekossa . . . . .	73
<b>8</b>	<b>Cauchyn kaava ja sen seurauksia</b>	<b>76</b>
	Cauchyn integraalikaava ympyränkehälle . . . . .	76
	Analyyttisen funktion Taylor-sarja . . . . .	78
	Eräitä Taylor-sarjoja . . . . .	81
	Analyyttisen funktion nollakohdat ja yksikäsitteisyys . . . . .	82
	Liouvillen lause . . . . .	83
	Maksimiperiaate ja Schwarzin lemma . . . . .	85
<b>9</b>	<b>Cauchyn kaavan globaali muoto</b>	<b>87</b>
	Syklit ja integrointi . . . . .	88
	Polkujen ja syklien kierrosluvut . . . . .	89
	Globaali Cauchyn lause ja sovelluksia . . . . .	92
	Yhdesti yhtenäiset alueet . . . . .	95
	Cauchyn lauseen 9.13 todistus . . . . .	96
<b>10</b>	<b>Kertauksen tiivistelmä</b>	<b>99</b>



# 1 Kompleksitaso

Aloitamme määrittelemällä kompleksiluvut ja niiden peruslaskutoimitukset eli yhteen- ja kertolaskun sekä liittolukuoperaation. Tarkastelemme kompleksiluvun ”napakoordinaattiesitystä” modulin ja argumentin käsitteiden avulla ja johdamme näihin liittyviä hyödyllisiä kaavoja.

Koska oletamme kompleksilukujen olevan ainakin jossain määrin entuudestaan tuttuja, eteneminen on osin nopeaa ja kertauksenomaista.

## Kompleksiluvut

Merkitään euklidista tasoa tutulla tavalla:  $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ , jossa  $\mathbb{R}$  on reaalilukujen joukko.  $\mathbb{R}^2$  koostuu siis reaalilukujen muodostamista pistepareista. Tasossa voidaan määritellä luonnollinen vektorisumma eli *yhteenlasku*, jossa

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2).$$

Laskemme siis koordinaatit pareittain yhteen. Edelleen jokainen tason piste  $(x, y)$  voidaan kertoa reaaliluvulla  $a$ :

$$a(x, y) = (ax, ay).$$

Tämä vastaa vektorin kertomista reaaliluvulla. Piste  $(x, y)$  vasta-alkio on tällöin  $(-1)(x, y)$ :

$$(x, y) + (-1)(x, y) = (0, 0).$$

Helposti huomaa, että yhteenlasku on vaihdannainen, joten voimme tiivistää yllä olevan sanomalla, että  $\mathbb{R}^2$  varustettuna yhteenlaskulla  $+$  on Abelin ryhmä  $(\mathbb{R}^2, +)$ . Sen nolla-alkio on  $(0, 0)$ , ja merkitsemme tätäkin vain lyhyesti symbolilla  $0$ .

Uutena asiana määrittelemme tasossa myös kertolaskun. Tämän saamme aikaan, kun samastamme tason pisteet kompleksilukujen kanssa. Tai paremminkin: kompleksiluvut syntyvät, kun määrittelemme tason pisteille kertolaskun seuraavalla tavalla:

**1.1 Määritelmä.** Tason  $\mathbb{R}^2$  pisteiden  $z_1 = (x_1, y_1)$  ja  $z_2 = (x_2, y_2)$  tulo on

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1).$$

Yleensä merkitsemme tuloa  $z_1 \cdot z_2$  lyhyemmin  $z_1z_2$ .

Seuraavat tulon ominaisuudet on helppo tarkistaa laskemalla: Jos  $z_1, z_2$  ja  $z_3$  ovat mielivaltaisia tason pisteitä, niin

- a)  $z_1 z_2 = z_2 z_1$  (*vaihdannaisuus*)
- b)  $z_1 \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot z_1 = z_1$  (*neutraalialkio*)
- c)  $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$  (*liitännäisyys*)
- d)  $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$  (*osittelulaki*).

Luonnollisesti määrittelemme  $z^0 = (1, 0)$  ja induktiivisesti  $z^n = z z^{n-1}$  jokaisella positiivisella kokonaisluvulla  $n$ .

Ominaisuudet a)–d) ja se, että  $(\mathbb{R}^2, +)$  on Abelin ryhmä, osoittavat että  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  on ykköseläinen vaihdannainen rengas. Enemmänkin on totta:

**1.2 Lause.** *Jos  $z = (x, y) \neq 0$ , niin on olemassa yksikäsitteinen piste  $w \in \mathbb{R}^2$  siten, että  $zw = wz = (1, 0)$ .*

*Todistus.* Koska kertolasku on vaihdannainen, riittää löytää piste  $w = (u, v)$  siten, että  $zw = (1, 0)$ . Nyt  $zw = (xu - yv, xv + yu) = (1, 0)$  jos ja vain jos

$$xu - yv = 1, \quad xv + yu = 0.$$

Tämä on tuntemattomille  $u$  ja  $v$  muodostettu yhtälöpari, jonka determinantti on  $x^2 + y^2 \neq 0$ . Siten yhtälöparilla on yksikäsitteinen ratkaisu, ja laskemalla nähdään, että se on

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v = \frac{-y}{x^2 + y^2}. \quad \square$$

Käytämme edellisen lauseen antamalle pisteelle merkintää  $1/z$  tai  $z^{-1}$ :llä. Se on pisteen  $z$  *käänteisalkio*. Siis jos  $z = (x, y) \neq 0$ , niin

$$z^{-1} = \left( \frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right).$$

**1.3 Seuraus.** *Taso  $\mathbb{R}^2$  varustettuna yhteenlaskulla  $+$  ja kertolaskulla  $\cdot$  on kunta.*

**1.4 Määritelmä.** Kuntaa  $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$  merkitään  $\mathbb{C}$ :llä ja kutsutaan *kompleksitasoksi* tai *kompleksilukujen kunnaksi*. Jokainen piste  $z \in \mathbb{C}$  on *kompleksiluku*.

Haluamme tulkita reaaliluvut kompleksilukujen osajoukkona samastamalla reaaliluvun  $x \in \mathbb{R}$  kompleksiluvun  $(x, 0) \in \mathbb{C}$  kanssa. Suoraan laskutoimitusten määritelmistä seuraa (tarkista!), että kaikilla  $x, y, u \in \mathbb{R}$  pätee

$$(x, 0) + (u, 0) = (x + u, 0), \\ (x, 0)(u, 0) = (xu, 0).$$

Siten tämä samastus on yhteensopiva laskutoimitusten määritelmien kanssa. Lisäksi nolla-alkiot  $0 \in \mathbb{R}$  ja  $(0, 0) \in \mathbb{C}$  vastaavat siinä toisiaan; samoin ykkösalkiot  $1 \in \mathbb{R}$  ja  $(1, 0) \in \mathbb{C}$ . Algebran kielellä kuvaus  $x \mapsto (x, 0)$  on siis kuntasomorfismi. Näin reaaliluvut  $\mathbb{R}$  voidaan ajatella kompleksilukujen  $\mathbb{C}$  osajoukkona ja alikuntana.

**1.5 Määritelmä.** a) Yo. samastuksen mukaisesti merkitsemme kertolaskun ykkösalkiota  $(1, 0)$  lyhyesti symbolilla  $1$  ja kompleksilukua  $(x, 0) = x(1, 0)$  lyhyesti  $x$ :llä.

b) Piste  $(0, 1)$  on *imaginaariyksikkö*. Käytämme siitä merkintää  $i$ .

Näillä merkinnöillä jokainen kompleksiluku  $z = (x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) \in \mathbb{C}$  voidaan esittää (yksikäsitteisesti) muodossa

$$(1.6) \quad z = x + iy.$$

Jatkossa käytämmekin lähes yksinomaan tätä esitystapaa!

**1.7 Määritelmä.** a) Esityksessä (1.6) reaaliluku  $x = \operatorname{Re} z$  on kompleksiluvun  $z$  *reaaliosa* ja reaaliluku  $y = \operatorname{Im} z$  on sen *imaginaariosa*.

b) Joukko  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z = 0\}$  on *reaaliakseli*.

c) Joukko  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = 0\}$  on *imaginaariakseli*, ja sen alkiot ovat *puhtaita imaginaarilukuja*.

Imaginaariyksiköllä  $i = (0, 1)$  on seuraava tärkeä ominaisuus:

$$(1.8) \quad i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) = (-1, 0) = -1,$$

eli se on luvun  $-1$  neliöjuuri, kuten myös on  $-i$ . Jos nyt  $z_1 = x_1 + iy_1$  ja  $z_2 = x_2 + iy_2$  ovat mielivaltaisia kompleksilukuja, niin summan ja tulon määritelmät on mukavinta muistaa muodoissa

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \\ z_1 z_2 &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Jälkimmäinen saadaan, kun suoritetaan lukujen  $x_1 + iy_1$  ja  $x_2 + iy_2$  kertominen termeittäin (osittelulakia soveltaen) ja käytetään kaavaa (1.8).

Seuraava käsite on erittäin hyödyllinen.

**1.9 Määritelmä.** Kompleksiluvun  $z = x + iy$  *liittoluku* eli *kompleksikonjugaatti* on luku  $\bar{z} = x - iy$ .

Liittoluvun ottaminen vastaa siis peilausta reaaliakselin suhteen. Erityisesti  $z$  on reaalinen eli  $\operatorname{Im} z = 0$  jos ja vain jos  $z = \bar{z}$ . Lisäksi liittoluvuille pätevät seuraavat laskusäännöt:

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \quad \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2.$$

Edelleen huomaamme, että kompleksiluvun reaaliosa ja imaginaariosa voidaan lausua liittoluvun avulla:

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Näiden kaavojen todistaminen on harjoitustehtävä.

## Moduli ja argumentti

**1.10 Määritelmä.** Kompleksiluvun  $z = x + iy$  *moduli* eli *itseisarvo* on

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Kyseessä on siis tason vektorin  $z = (x, y)$  tavallinen euklidinen normi eli pituus. Modulin neliö voidaan kätevästi laskea liittoluvun avulla:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

Jos  $z \neq 0$ , niin sen käänteisluvulle  $z^{-1} = 1/z$  saadaan toisinaan kätevä esitys

$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

**1.11 Esimerkki.** Yo. menetelmillä voidaan esimerkiksi laskea

$$\frac{1}{1 + 2i} = \frac{1 - 2i}{(1 + 2i)(1 - 2i)} = \frac{1 - 2i}{1^2 + 2^2} = \frac{1}{5} - \frac{2}{5}i$$

ja edelleen

$$\frac{2 + 5i}{1 + 2i} = (2 + 5i)\left(\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right) = \left(2 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot \frac{2}{5}\right) + \left(2 \cdot \frac{-2}{5} + 5 \cdot \frac{1}{5}\right)i = 2\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

**1.12 Esimerkki.** Olkoot  $z$  ja  $w$  kompleksilukuja. Tarkastellaan summan  $z + w$  modulia:

$$|z + w|^2 = (z + w)(\bar{z} + \bar{w}) = z\bar{z} + w\bar{w} + z\bar{w} + w\bar{z} = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re} z\bar{w}.$$

Jokaisella kompleksiluvulla selvästikin pätee  $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$ . Siten yllä on  $|\operatorname{Re} z\bar{w}| \leq |z\bar{w}| = |z||w|$  ja saamme arvion

$$|z + w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| = (|z| + |w|)^2.$$

Olemme siis todistaneet – kompleksilukumenetelmiä käyttäen – *kolmioepäyhtälön*:

$$|z + w| \leq |z| + |w|.$$

Tason vektoreilla on paitsi pituus myös suunta, joka voidaan ilmaista suuntakulman avulla. Vastaavasti kompleksiluvuilla:

**1.13 Määritelmä.** Kompleksiluvun  $z = x + iy \neq 0$  *argumentti* eli *vaihekulma*  $\arg z$  on sellainen  $\varphi$ , jolle  $\cos \varphi = x/|z|$  ja  $\sin \varphi = y/|z|$ .

Argumentti on siis määritelty vain nolasta eroaville kompleksiluvuille, ja silloinkin vain  $2\pi$ :n monikertaa vaille. Geometrisesti argumentti on kulma, jonka origosta pisteeseen  $z$  piirretty jana muodostaa positiivisen reaaliakselin kanssa; kulman kiertosuunta (se otetaanko kulma pos. reaaliakselilta lähdettäessä positiiviseen vai negatiiviseen kiertosuuntaan) antaa kulman etumerkin. Huomataan, että määritelmän tilanteessa

$$(1.14) \quad z = x + iy = |z| \cos \varphi + i|z| \sin \varphi = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Jos  $z = 0$ , niin tämä esitys pätee mielivaltaisella  $\varphi$ , sillä  $|z| = 0$ . Tätä esitystä kutsutaan kompleksiluvun  $z$  *napaesitykseksi*.



**1.15 Esimerkki.** Olkoon  $z = 1 + i\sqrt{3}$ . Tällöin  $|z| = (1 + 3)^{1/2} = 2$  ja  $\arg z = \arccos(1/2) = \pi/3$ .

Palautetaan mieleen, että  $z$ :n liittoluku on  $\bar{z} = x - iy$ . Koska sini on pariton funktio ja kosini parillinen, tästä seuraa helposti, että

$$(1.16) \quad \arg \bar{z} = -\arg z.$$

Tässä ja muissa vastaavissa kaavoissa on muistettava, että yhtäsuuruus pätee oikeastaan vain  $2\pi$ :n monikertaa vaille.

Oletetaan, että  $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  kuten yllä ja  $w$  on toinen kompleksiluku, jonka napaesitys on  $w = |w|(\cos \theta + i \sin \theta)$ . Tällöin käyttämällä trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavoja saamme

$$\begin{aligned} zw &= |z||w|(\cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta + i(\cos \varphi \sin \theta + \sin \varphi \cos \theta)) \\ &= |z||w|(\cos(\varphi + \theta) + i \sin(\varphi + \theta)). \end{aligned}$$

Olemme siis todistaneet seuraavan tärkeän tuloksen:

**1.17 Lause.** *Tulon moduli on modulien tulo:  $|zw| = |z||w|$ . Jos  $z, w \neq 0$ , niin tulon  $zw$  argumentti on argumenttien summa:  $\arg zw = \arg z + \arg w$ .*

Lauseella 1.17 on hyödyllinen geometrinen tulkinta: Kun  $a \neq 0$  on kiinteä kompleksiluku, multiplikaatiokuvauksessa  $z \mapsto az$   $z$ :n moduli kerrotaan  $a$ :n modulilla  $|a|$  ja  $z$ :n argumenttiin lisätään  $\arg a$ ; toisin sanoen tämä kuvaus on *venytys* (tai kutistus) yhdistettynä *kiertoon*! Erityisesti kuvaus  $z \mapsto iz$  on kierto positiiviseen suuntaan kulman  $\pi/2$  (eli  $90^\circ$ ) verran.

**1.18 Seuraus.** *Jos  $z, w \in \mathbb{C}$  ja  $w \neq 0$ , niin*

$$\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}, \quad \arg \frac{z}{w} = \arg z - \arg w.$$

*Erityisesti  $|1/w| = 1/|w|$  ja  $\arg(1/w) = -\arg w$ .*

*Todistus.* Koska  $z = \frac{z}{w}w$ , saadaan  $|z| = \left| \frac{z}{w} \right| |w|$  ja  $\arg z = \arg \frac{z}{w} + \arg w$ . □

**1.19 Esimerkki.** Näiden tulosten avulla voidaan esimerkiksi luvun  $(1+i\sqrt{3})/(1-i\sqrt{3})$  moduli ja argumentti päätellä suoraan ko. murtolauseketta sieventämättä: Koska kaikille kompleksiluvuille  $z$  on  $|z/\bar{z}| = 1$  ja koska  $\arg(1 \pm i\sqrt{3}) = \pm\pi/3$  (vrt. esimerkki 1.15 ja kaava (1.16)), saadaan

$$\left| \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \right| = 1, \quad \arg \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \pi/3 - (-\pi/3) = 2\pi/3.$$

Kompleksilukumerkinnöin voidaan monia tason geometrisia objekteja esittää kätevästi. Yksinkertainen esimerkki: koska  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$  jokaiselle  $z = x + iy$ , tason yksikköympyrä voidaan kirjoittaa

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

Tämä antaa myös hieman vaihtoehtoisen tavan konstruoida kompleksilukujen napaesitys: Tiedämme, että jokainen yksikköympyrän piste  $z_0 \in S^1$  voidaan esittää muodossa  $z_0 = (\cos \varphi, \sin \varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , jossa  $\varphi \in \mathbb{R}$ . Jos  $z \neq 0$  on mielivaltainen kompleksiluku, pätee seurauslauseen 1.18 nojalla  $z/|z| \in S^1$ . Erityisesti siis

$$z = |z| \frac{z}{|z|} = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad \text{jossa } \varphi = \arg z.$$

### Moivre'n ja Eulerin kaavat

Tutkimme seuraavaksi potenssiinkorotusta napaesityksen kannalta. Tämä edelleen kirkastaa kompleksilukujen ja trigonometrian välistä yhteyttä. Seuraava klassinen kaava on tärkeä.

**1.20 Lause** (Moivre'n kaava). *Jokaisella kokonaisluvulla  $n$  pätee*

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

*Todistus.* Merkitään  $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ , jolloin  $|z| = 1$ . Jos  $n = 0$ , niin väite on totta, sillä  $z^0 = 1$ . Oletetaan, että  $n > 0$ . Tällöin

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = z^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

lauseen 1.17 nojalla. Toisaalta jos  $n < 0$ , niin

$$z^{-1} = \bar{z} = \cos \varphi - i \sin \varphi = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)$$

ja soveltamalla todistuksen alkuosaa lukuun  $z^{-1}$  ja eksponenttiin  $-n$ , saamme tästä

$$z^n = (z^{-1})^{-n} = (\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi))^{-n} = \cos n\varphi + i \sin n\varphi,$$

mikä todistaa väitteen. □

Moivre'n kaavaa voidaan käyttää esimerkiksi trigonometrinen kaavojen johtamiseen.

**1.21 Esimerkki.** Pyritään lausumaan  $\cos 3\varphi$  pelkästään kulman  $\varphi$  kosinin avulla. "Täydennetään"  $\cos 3\varphi$  kompleksiluvuksi ja käytetään Moivre'n kaavaa:

$$\begin{aligned} \cos 3\varphi &= \operatorname{Re}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 \\ &= \operatorname{Re}(\cos^3 \varphi + 3i \cos^2 \varphi \sin \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi - i \sin^3 \varphi) \\ &= \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi \sin^2 \varphi \\ &= 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi, \end{aligned}$$

sillä  $\cos^2 \varphi = 1 - \sin^2 \varphi$ .

**1.22 Esimerkki.** Lasketaan  $(1 + i\sqrt{3})^6$ . Esimerkin 1.15 perusteella näemme, että  $1 + i\sqrt{3} = 2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ . Siten Moivre'n kaavan avulla saamme

$$(1 + i\sqrt{3})^6 = 2^6 (\cos \frac{6}{3}\pi + i \sin \frac{6}{3}\pi) = 64 (\cos 2\pi + i \sin 2\pi) = 64.$$

Tarkastellaan hetki funktiota  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi$ . Lauseen 1.17 mukaan – eli viimekädessä kosinin ja sinin yhteenlaskukaavojen nojalla – pätee  $f(\varphi + \theta) = f(\varphi)f(\theta)$ . Siis  $f$  käyttäytyy kuten eksponenttifunktio!

Otammekin käyttöön seuraavan merkinnän, jota kutsutaan *Eulerin kaavaksi*:

$$(1.23) \quad e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Tässä siis eksponenttifunktio tulee määritellyksi puhtaasti imaginaarisille luvuille. Euler aikoinaan motivoi tämän identiteetin vertailemalla lausekkeiden sarjakehitelmiä. Esitämme Eulerin päättelyn tuonnempana; tässä vaiheessa kurssia Eulerin kaavaa (1.23) kannattaa pitää vain lyhyenä ja käteväenä merkintätapana. Tulemme kuitenkin myöhemmin näkemään, että jos halutaan määritellä koko kompleksitasossa eksponenttifunktio siten, että se on kompleksisesti differentioituva (eli analyyttinen) ja yhtyy reaaliakselilla tuttuun reaaliseen eksponenttifunktioon, niin saatava funktio väistämättä toteuttaa imaginaariakselilla kaavan (1.23)!

Huomaa, että Eulerin kaavan mukaan  $|e^{i\varphi}| = 1$  ja  $\arg e^{i\varphi} = \varphi$ . Edellä jo totesimme, että  $e^{i(\varphi+\theta)} = e^{i\varphi}e^{i\theta}$ . Lisäksi Moivre'n kaava saa kompaktin muodon

$$(1.24) \quad (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}.$$

Erityisesti  $1/e^{i\varphi} = e^{-i\varphi}$ . Kompleksiluvun  $z$  napaesitys (1.14) puolestaan saa muodon

$$(1.25) \quad z = re^{i\varphi}, \quad \text{jossa } r = |z|, \varphi = \arg z.$$

Tämän avulla voidaan laskea esimerkiksi seuraavasti: jos  $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$  ja  $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ , niin  $z_1 z_2 = r_1 e^{i\varphi_1} r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$ . Huomaa vielä, että  $\varphi$ :n funktiona  $e^{i\varphi}$  on  $2\pi$ -jaksollinen.

Kääntäen Eulerin kaavasta saadaan trigonometrisille funktioille esitykset (tarkista!)

$$\cos \varphi = \frac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}).$$

Nämäkin ovat monesti hyvin käyttökelpoisia. Niiden avulla voi vaikkapa palauttaa mieleen trigonometristen funktioiden yhteenlaskukaavat; esimerkkinä

$$\begin{aligned} \cos(\varphi + \theta) &= \operatorname{Re} e^{i(\varphi+\theta)} = \operatorname{Re} e^{i\varphi} e^{i\theta} \\ &= \operatorname{Re} (\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \theta + i \sin \theta) \\ &= \cos \varphi \cos \theta - \sin \varphi \sin \theta. \end{aligned}$$

**1.26 Esimerkki.** Lausutaan  $\cos^4 \varphi$  muotoa  $\cos n\varphi$  olevien lausekkeiden avulla:

$$\begin{aligned} \cos^4 \varphi &= \left( \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^4 \\ &= \frac{1}{16} (e^{4i\varphi} + 4e^{3i\varphi} e^{-i\varphi} + 6e^{2i\varphi} e^{-2i\varphi} + 4e^{i\varphi} e^{-3i\varphi} + e^{-4i\varphi}) \\ &= \frac{1}{16} (e^{4i\varphi} + 4e^{2i\varphi} + 6 + 4e^{-2i\varphi} + e^{-4i\varphi}) \\ &= \frac{1}{8} \left( \frac{e^{i4\varphi} + e^{-i4\varphi}}{2} + 4 \frac{e^{i2\varphi} + e^{-i2\varphi}}{2} + 3 \right) \\ &= \frac{1}{8} (\cos 4\varphi + 4 \cos 2\varphi + 3). \end{aligned}$$

**1.27 Huomautus.** Eulerin kaavan ja kompleksilukujen napaesityksen avulla voimme esittää myös erilaisia geometrisia kuvauksia tai operaatioita. Esimerkiksi tason kierto  $U_\alpha$  kulman  $\alpha$  verran voidaan esittää kompleksilukujen avulla kätevästi,

$$U_\alpha : z \mapsto e^{i\alpha} z, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Sovelluksena määrätään vaikkapa peilaus suoran  $L$  suhteen, kun  $L$  kulkee origon kautta ja tekee kulman  $\alpha$  positiivisen reaaliakselin kanssa. Jos peilausta merkitään  $P$ :llä, se saadaan (Miksi?) kiertämällä suora  $L$  reaaliakseliksi, peilaamalla reaaliakselin suhteen ja lopuksi kiertämällä reaaliakseli takaisin suoraksi  $L$ . Koska peilaus reaaliakselin suhteen on sama kuin liittoluvun ottaminen,  $z \mapsto \bar{z}$ , saamme

$$P(z) = e^{i\alpha} \overline{e^{-i\alpha} z} = e^{i2\alpha} \bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

### Binomiyhtälö napaesityksessä

Tarkastellaan luvun lopuksi *binomiyhtälön*  $z^n = a$  ratkaisemista napaesityksen avulla. Tässä  $a$  on annettu kompleksiluku, ja kyseessä on siis luvun  $a$   $n$ :nnen juuren  $a^{1/n}$  kaikkien arvojen määrittäminen.

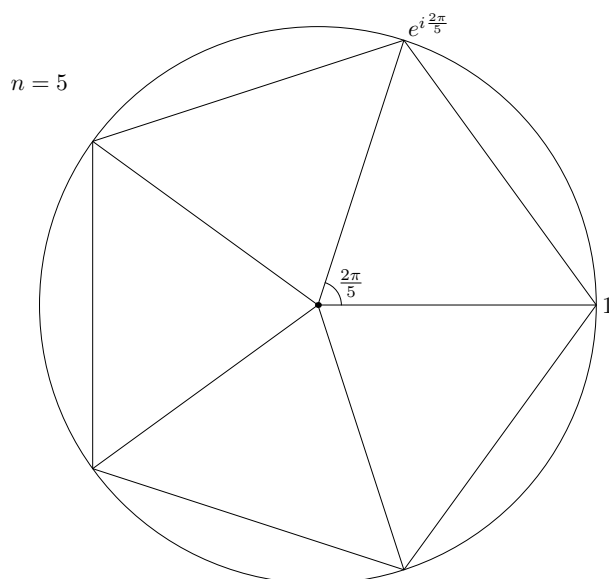
Jos  $a = 0$ , yhtälöllä on vain yksi ratkaisu  $z = 0$  (miksi?). Oletamme, että  $a \neq 0$ . Olkoon  $a$ :lla napaesitys  $a = |a|e^{i\theta}$ , jossa  $\theta = \arg a$ . Vastaavasti  $z = re^{i\varphi}$ , jossa  $r = |z|$  ja  $\varphi = \arg z$ . Nyt Moivre'n kaavan (1.24) avulla yhtälö  $z^n = a$  saa muodon

$$r^n e^{in\varphi} = |a| e^{i\theta}.$$

Tämä toteutuu täsmälleen silloin, kun  $r = |a|^{1/n}$  (positiivinen luku!) ja  $n\varphi = \theta + 2\pi k$  eli  $\varphi = \theta/n + 2\pi k/n$  jollakin kokonaisluvulla  $k$ . Vastaavia  $z$ :n arvoja on täsmälleen  $n$  erisuurta; esimerkiksi ne, jotka vastaavat  $k$ :n arvoja  $0, 1, \dots, n-1$ . Siis: tapauksessa  $a \neq 0$  on luvulla  $a^{1/n}$  kompleksitasossa  $n$  eri arvoa ja ne ovat (kun  $\theta = \arg a$ )

$$(1.28) \quad z = re^{i\varphi}, \quad \text{jossa } r = |a|^{1/n} \text{ ja } \varphi = \theta/n + 2\pi k/n \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Erityisesti tapauksessa  $a = 1$  nähdään, että yhtälön  $z^n = 1$  ratkaisut ovat yksikköympyrän pisteet  $\epsilon_n^0 = 1$  ja  $\epsilon_n^k = e^{i2\pi k/n}$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ . Niitä kutsutaan  $n$ :nsiksi *ykkösenjuuriksi*, ja ne ovat yksikköympyrän sisään piirretyn säännöllisen  $n$ -kulmion kärjet (jos  $n > 2$ ).



Yleisen binomiyhtälön  $z^n = a$  ( $a \neq 0$ ) tapauksessa voidaan puolestaan menetellä seuraavasti: Valitaan jokin juurista, esimerkiksi  $z_0 = |a|^{1/n} e^{i\theta/n}$ . Tällöin kaavoista (1.28) nähdään, että muut juuret ovat  $z_k = z_0 \epsilon_n^k$ ,  $k = 1, \dots, n-1$ , jossa  $\epsilon_n^k$ :t ovat edellä mainitut ykkösenjuuret.

**1.29 Esimerkki.** Yhtälön  $z^4 = 1$  ratkaisut ovat  $z = \pm 1, \pm i$ . (Tarkista!) Saman asian näkee myös kirjoittamalla  $z^4 - 1 = (z^2 - 1)(z^2 + 1) = (z - 1)(z + 1)(z - i)(z + i)$ .

**1.30 Esimerkki.** Etsitään sitten yhtälön  $z^4 = -1$  ratkaisut. Koska  $-1 = e^{i\pi}$ , yksi ratkaisu on  $z_0 = e^{i\pi/4} = \cos \pi/4 + i \sin \pi/4 = (1 + i)/\sqrt{2}$ .

Edellä opitun mukaisesti kaikki juuret ovat  $z_k = z_0 \epsilon^k$ ,  $k = 0, 1, 2, 3$ , jossa luvut  $\epsilon^k = e^{i \cdot 2\pi k/4}$  ovat itse asiassa edellisen esimerkin luvut. Siispä etsityt juuret ovat

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_1 = z_0 \cdot i = \frac{-1+i}{\sqrt{2}},$$

$$z_2 = z_0 \cdot (-1) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = z_0 \cdot (-i) = \frac{1-i}{\sqrt{2}}.$$

Selvitä itsellesi harjoitustehtävänä, millaisten neliöiden kärkipisteinä ovat esimerkkien 1.29 ja 1.30 juuret (piirrä kuva)!

**1.31 Huomautus.** Kullakin  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n$ :nnet ykkösenjuuret muodostavat ryhmän! Nimittäin jos merkitään

$$S_n = \{e^{i \cdot 2\pi k/n} : k = 0, 1, \dots, n-1\} = \{\epsilon_n^k : k = 0, 1, \dots, n-1\},$$

silloin  $z, w \in S_n \Rightarrow zw \in S_n$  ja  $1/z \in S_n$  (MIKSI?). Ryhmän  $S_n$  laskutoimituksena on siis tavallinen lukujen tulo.

Itse asiassa, rakenteeltaan ryhmä  $S_n$  on *syklinen ryhmä*, virittäjänään (esim.) alkio  $\epsilon_n$  (MIKSI?).

## 2 Kompleksitason topologiaa

Kompleksianalyysi hyödyntää monessa yhteydessä erilaisia topologian peruskäsitteitä, niin myös tällä kurssilla, jolla tarvitsemme topologiaa lähinnä samassa laajuudessa kuin Vektorianalyysin kurssilla. Siksi tässä luvussa kertaamme ja käymme lyhyesti läpi topologiaa kompleksitasossa (jopa hieman tarvettamme laajemminkin).

Heti tarvittaviin käsitteisiin kuuluvat mm. avoimet ja suljetut joukot, kompleksilukujonojen suppeneminen ja funktioiden jatkuvuus; myöhemmin topologian käyttöä laajennetaan kulloistenkin tarpeiden mukaan. Sivuuutamme osittain tarkastelujen yksityiskohdat ja todistukset. Tarkemmin ja yleisemmin asioita käsitellään kurssilla Topologia I ja sen oppikirjassa J. VÄISÄLÄ: *Topologia I*, Limes ry (4. painos, 2007).

Varsinkin tason topologiaa (tai yleisemmin metristä topologiaa) hyvin tunteva lukija voinee keskittyä tässä luvussa lähinnä esimerkkien opiskeluun.

### Metriikka

Kompleksitason  $\mathbb{C}$  topologian määrittelee kahden pisteen  $z, w \in \mathbb{C}$  välinen *etäisyys* eli *metriikka*

$$|z - w| = \sqrt{(x - u)^2 + (y - v)^2},$$

jossa  $z = x + iy$  ja  $w = u + iv$ . Kyseessä on siis tavallinen  $\mathbb{R}^2$ :n euklidinen etäisyys. Siten metrisenä topologisena avaruutena  $\mathbb{C}$  on sama kuin tuttu euklidinen taso  $\mathbb{R}^2$ . On kuitenkin syytä katsoa, miten kyseinen topologia suhtautuu esimerkiksi kompleksilukujen laskutoimituksiin. Itse asiassa osoittautuu, että kompleksiluvuilla monet tarkastelut sujuvat täysin samalla tavalla kuin reaaliakselilla. Erityisesti pätee *kolmioepäyhtälö*

$$||z| - |w|| \leq |z - w| \leq |z| + |w|,$$

jolle esitimme kompleksisen todistuksen esimerkissä 1.12.

### Avoimet ja suljetut joukot

Kun  $z \in \mathbb{C}$  ja  $r > 0$ , käytämme seuraavia merkintöjä kompleksitason  $z$ -keskisille ja  $r$ -säteisille kiekkoille:

$$D(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| < r\} \quad (\text{avoin kiekko})$$

$$\overline{D}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq r\} \quad (\text{suljettu kiekko})$$

Joukko  $A \subset \mathbb{C}$  on *avoin*, mikäli jokaisella  $z \in A$  on olemassa  $r > 0$  siten, että  $D(z, r) \subset A$ . Joukko  $A$  on *suljettu*, jos sen komplementti  $A^c = \mathbb{C} \setminus A$  on avoin.

**2.1 Esimerkki.** a) Jokainen kiekko  $D(z, r)$  on avoin, sillä jos  $w \in D(z, r)$  ja merkitään  $s = r - |w - z| > 0$ , niin  $D(w, s) \subset D(z, r)$  yksinkertaisen kolmioepäyhtälöpäätelyn nojalla. Vastaavasti joukko  $\bar{D}(z, r)$  on suljettu, sillä komplementti  $\{w : |w - z| > r\}$  on avoin.

b) Koko kompleksitaso  $\mathbb{C}$  ja tyhjä joukko  $\emptyset$  ovat sekä suljettuja että avoimia.

Mitä tahansa avointa joukkoa, johon piste  $z$  sisältyy, kutsutaan  $z$ :n *ympäristöksi*. Kiekko  $D(z, r)$  on erikoistapaus tästä.

Palautamme seuraavaksi mieleen, miten ominaisuudet ”avoin” ja ”suljettu” säilyvät yhdisteitä ja leikkauksia muodostettaessa.

**2.2 Lause.** a) *Avointen joukkojen mielivaltaiset yhdisteet ovat avoimia. Samoin niiden äärelliset leikkaukset ovat avoimia.*

b) *Suljettujen joukkojen mielivaltaiset leikkaukset ovat suljettuja. Samoin niiden äärelliset yhdisteet ovat suljettuja.*

*Todistus.* a) Oletetaan, että joukot  $A_j$  ( $j \in I$ ), jossa  $I \neq \emptyset$  on mielivaltainen indeksijoukko, ovat avoimia kompleksitasossa. Olkoon  $z \in \bigcup_{j \in I} A_j$ . Siis  $z \in A_j$  jollain  $j \in I$ , ja koska kyseinen  $A_j$  on avoin, on olemassa  $r > 0$ , jolle  $D(z, r) \subset A_j$ . Mutta tällöin myös  $D(z, r) \subset \bigcup_{j \in I} A_j$ . Siten yhdiste  $\bigcup_{j \in I} A_j$  on avoin.

Oletetaan sitten, että  $A_1, \dots, A_n$  ovat avoimia. Olkoon  $z \in \bigcap_{j=1}^n A_j$ . Tällöin on jokaisella  $j = 1, \dots, n$  olemassa  $r_j > 0$ , jolle  $D(z, r_j) \subset A_j$ . Olkoon  $r$  pienin luvuista  $r_j$  (luku  $r > 0$  mahdollista valita, koska lukuja on vain äärellinen määrä). Tällöin  $D(z, r) \subset \bigcap_{j=1}^n D(z, r_j) \subset \bigcap_{j=1}^n A_j$ . Siten leikkaus  $\bigcap_{j=1}^n A_j$  on avoin.

b) Sovelletaan a-kohtaa annettujen suljettujen joukkojen komplementteihin.  $\square$

Muista, ettei avointen joukkojen mielivaltainen leikkaus ole välttämättä avoin. Esimerkiksi käy leikkaus  $\bigcap_{r>0} D(a, r) = \{a\}$ . Vastaavasti mielivaltaisen suljettujen joukkojen yhdisteen ei tarvitse olla suljettu.

### Sisus, reuna ja sulkeuma

Olkoon  $A \subset \mathbb{C}$  mielivaltainen joukko. Sen *sulkeuma*  $\bar{A}$  muodostuu niistä pisteistä  $z \in \mathbb{C}$ , joilla jokainen kiekko  $D(z, r)$  sisältää  $A$ :n pisteitä:

$$\bar{A} = \{z \in \mathbb{C} : D(z, r) \cap A \neq \emptyset \text{ kaikilla } r > 0\}$$

Piste  $z \in A$  on  $A$ :n *sisäpiste*, jos on olemassa  $r > 0$  siten, että  $D(z, r) \subset A$ . Piste  $z \in \mathbb{C}$  on puolestaan  $A$ :n *reunapiste*, jos jokainen kiekko  $D(z, r)$  sisältää sekä  $A$ :n että sen komplementin  $A^c$  pisteitä. Näiden joukoille käytetään seuraavia merkintöjä ja nimityksiä:

$$\text{int } A = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ on } A\text{:n sisäpiste}\} \quad (A\text{:n sisus})$$

$$\partial A = \{z \in \mathbb{C} : z \text{ on } A\text{:n reunapiste}\} \quad (A\text{:n reuna})$$

Aina pätee

$$\bar{A} = \text{int } A \cup \partial A \quad (\text{erillinen yhdiste}),$$

ja  $\text{int } A$  on laajin avoin joukko, joka sisältyy  $A$ :han, sekä  $\bar{A}$  on suppein suljettu joukko, joka sisältää  $A$ :n. Erityisesti: Jos  $A$  on avoin, niin  $A = \text{int } A$ , ja jos  $A$  on suljettu, niin  $A = \bar{A}$ .

**2.3 Esimerkki.** Tarkastellaan kiekkoja  $D(z, r)$  ja  $\bar{D}(z, r)$ . Kummankin sisus on avoin kiekko  $D(z, r)$ , ja kummankin sulkeuma on suljettu kiekko  $\bar{D}(z, r)$ . Kummankin reuna on ympyrä  $S(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| = r\}$ .

Piste  $z \in \mathbb{C}$  on joukon  $A$  *kasautumispiste*, jos jokaisella  $r > 0$  kiekko  $D(z, r)$  sisältää äärettömän monta  $A$ :n pistettä. Yhtäpitävästi riittää vaatia, että jokainen  $D(z, r)$  sisältää ainakin yhden  $A$ :n pisteen, joka on  $\neq z$ .

**2.4 Lause.** Joukon  $A \subset \mathbb{C}$  sulkeuma  $\bar{A}$  saadaan lisäämällä  $A$ :han kaikki  $A$ :n kasautumispisteet. Siten  $A$  on suljettu jos ja vain jos  $A$  sisältää kaikki kasautumispisteensä.

*Todistus.* Todetaan ensin, että kaikki kasautumispisteet sisältyvät sulkeumaan  $\bar{A}$ . Jos nimittäin  $z$  on  $A$ :n kasautumispiste, niin jokainen kiekko  $D(z, r)$  sisältää  $A$ :n pisteitä (jopa äärettömän monta). Siten määritelmän mukaan  $z \in \bar{A}$ .

Kääntäen oletetaan, että  $z$  on sulkeuman  $\bar{A}$  piste, joka ei kuitenkaan kuulu  $A$ :han. On näytettävä, että  $z$  on kasautumispiste. Jos  $r > 0$ , niin ehdosta  $z \in \bar{A}$  seuraa, että  $D(z, r) \cap A$  sisältää jonkin  $A$ :n pisteen  $a$ . Koska  $z \notin A$ , on välttämättä  $a \neq z$ . Näin näemme, että  $z$  on  $A$ :n kasautumispiste.  $\square$

## Kompleksilukujonojen suppeneminen

Kompleksilukujen muodostamien jonojen suppeneminen määritellään aivan kuten reaalisten jonojen suppeneminen.

**2.5 Määritelmä.** Olkoon  $(z_n) = (z_n)_{n=1}^{\infty}$  jono kompleksilukuja. Jono  $(z_n)$  *suppenee* kohti lukua  $z \in \mathbb{C}$ , jos jokaisella  $\epsilon > 0$  on olemassa  $N(\epsilon)$  siten, että

$$|z_n - z| < \epsilon \quad \text{aina kun } n > N(\epsilon).$$

Lukua  $z$  kutsutaan tällöin ko. jonon *raja-arvoksi*, ja merkitsemme  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z$  tai lyhyemmin  $\lim z_n = z$  tai  $z_n \rightarrow z$ . Jos jono ei suppene, se *hajaantuu*.

**2.6 Lause.** Olkoon  $(z_n)$  jono kompleksilukuja ja  $z \in \mathbb{C}$ .

- a)  $z_n \rightarrow z$  jos ja vain jos  $\text{Re } z_n \rightarrow \text{Re } z$  ja  $\text{Im } z_n \rightarrow \text{Im } z$ .
- b) Jos  $z_n \rightarrow z$ , niin  $|z_n| \rightarrow |z|$ .

*Todistus.* a) Kolmioepäyhtälöstä saadaan (miten?) arviot

$$|z_n - z| \leq |\text{Re } z_n - \text{Re } z| + |\text{Im } z_n - \text{Im } z| \leq 2|z_n - z|,$$

ja väite seuraa näistä.

- b) Kolmioepäyhtälön vasemman puolen nojalla  $||z_n| - |z|| \leq |z_n - z|$ .  $\square$



**2.7 Esimerkki.** a) Jos  $z_n = (1 + 1/n) + i(1 - 1/n)$ , niin  $z_n \rightarrow 1 + i$ .

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (in + 1)/(n + i) = i$ , sillä jos  $\epsilon > 0$ , niin

$$\left| \frac{in + 1}{n + i} - i \right| = \left| \frac{in + 1 - (in - 1)}{n + i} \right| = \frac{2}{|n + i|} < \frac{2}{n} < \epsilon,$$

kun  $n > 2/\epsilon$ . Huomaa tässä, että  $|n + i| = \sqrt{n^2 + 1} > n$ .

c) Jos  $z_n = e^{in\pi} = \cos n\pi + i \sin n\pi$ , niin  $(z_n)$  hajaantuu. Miksi?

Lukujonon raja-arvojen laskusäännöt pätevät kompleksiluvuille aivan samoin kuin reaalityyppisille. Pohjimmiltaan tämä johtuu siitä, että kompleksilukujen laskutoimitukset noudattavat samoja lakeja kuin reaalityyppisten lukujen ja että moduli suhtautuu niihin kuten itseisarvo reaalityyppisten lukujen laskutoimituksiin. Seuraavan lauseen todistuksen jätämme harjoitustehtäväksi; se sujuu muodollisesti täsmälleen samalla tavalla kuin reaalityyppisillä.

**2.8 Lause.** Jos  $\lim z_n = z$  ja  $\lim w_n = w$ , niin  $\lim(z_n + w_n) = z + w$  ja  $\lim z_n w_n = zw$  sekä  $\lim(z_n/w_n) = z/w$  (mikäli  $w \neq 0$ ).

### Funktion raja-arvo

Tarkastelemme funktiota  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ , jossa  $A \subset \mathbb{C}$  on epätyhjä, ja tavoitteenamme on määrittellä ja laskea sille raja-arvoja  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ . Raja-arvojen tarve on ilmeinen; esimerkiksi analyyttisen funktion määritelmässä seuraavan luvun alussa on tutkittava annetun funktion erotusosamäärän raja-arvoa, kun kyseinen funktio on määritelty  $a$ :n ympäristössä.

Ensiksi on otettava kantaa siihen, millaisille pisteille  $a$  tämä on ylipäätään mielekäs kysymys. Kuten reaalityyppisen funktion analyysistä muistetaan, funktion raja-arvo jossakin pisteessä  $a$  määriytyy arvoista, joita funktio saa pisteen  $a$  ”lähellä” (so. ympäristössä), mutta funktion arvolla itse pisteessä  $a$  ei ole merkitystä; itse asiassa funktion ei tarvitse olla edes määritelty  $a$ :ssa. On siis syytä vaatia, että jokaisessa kiekossa  $D(a, r)$  on  $A$ :n pisteitä, jotka ovat  $\neq a$ ; ts.  $a$  on oletettava joukon  $A$  kasautumispisteeksi.

Meillä tyypillisesti funktion  $f$  määrittelyjoukko  $A$  tulee olemaan jokin avoin joukko ja  $a$  sen reunapiste. Tällöin  $a$  on automaattisesti myös kasautumispiste (ks. lause 2.4).

**2.9 Määritelmä.** Oletetaan, että  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ja  $a$  on joukon  $A$  kasautumispiste. Funktiolla  $f$  on *raja-arvo*  $w$  pisteessä  $a$ , jos jokaisella  $\epsilon > 0$  on olemassa  $\delta = \delta(\epsilon) > 0$  siten, että

$$|f(z) - w| < \epsilon, \quad \text{kun } z \in A \cap D(a, \delta), \quad z \neq a.$$

Tällöin merkitään  $w = \lim_{z \rightarrow a} f(z)$ , tai jos halutaan korostaa, minkä joukon suhteen raja-arvo on laskettu, esimerkiksi

$$w = \lim_{A \ni z \rightarrow a} f(z).$$

Toteamme ilman todistusta, että funktioiden summia, tuloja ja osamääriä sekä yhdistelmiä koskevat raja-arvojen laskusäännöt ovat voimassa samaan tapaan kuin reaaliuuttujan funktioilla (vrt. myös lauseet 2.8, 2.15 ja 2.16).

**2.10 Esimerkki.** Kun  $z \rightarrow 0$ ,

$$\frac{1}{z^2 - z} + \frac{1}{z} = \frac{1}{z(z-1)} + \frac{1}{z} = \frac{1 + (z-1)}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \rightarrow -1.$$

Raja-arvon karakterisointi jonojen avulla saa seuraavan muodon (vrt. myös lause 2.17 alla). Lauseen kriteeri on käyttökelpoinen esim. silloin, kun halutaan osoittaa, että jollakin funktiolla ei ole raja-arvoa pisteessä  $a$ : pyritään etsimään kaksi  $a$ :ta kohti suppenevaa jonoa, joita ”pitkin”  $f$  saa erisuuret raja-arvot.

**2.11 Lause.** Oletetaan, että  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ja  $a$  on  $A$ :n kasautumispiste. Tällöin  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = w$  jos ja vain jos pätee seuraava ehto: aina kun  $(z_n)$  on jono joukon  $A \setminus \{a\}$  pisteitä jolle  $z_n \rightarrow a$ , niin  $f(z_n) \rightarrow w$ .

**2.12 Esimerkki.** Onko funktiolla  $f(z) = z/\bar{z}$  ( $z \neq 0$ ) raja-arvoa origossa? Pannaan merkille, että reaaliakselilla on  $\bar{z} = z$  ja siten  $f(z) = 1$ , kun taas imaginaariakselilla on  $\bar{z} = -z$  ja siten  $f(z) = -1$ . Niinpä esimerkiksi  $f(1/n) \rightarrow 1$  ja  $f(i/n) \rightarrow -1$  vaikka jonot  $(1/n)$  ja  $(i/n)$  molemmat suppenevat origoon. Näin ollen  $f$ :llä ei ole raja-arvoa origossa.

Itse asiassa napaesityksen  $z = re^{i\varphi}$  avulla nähdään, että  $f(re^{i\varphi}) = e^{i\varphi}/e^{-i\varphi} = e^{2i\varphi}$ , kun  $r > 0$ . Tämä osoittaa, että  $f$ :llä on vakioarvo jokaisella origon kautta kulkevalla suoralla, josta origo on poistettu. Jos  $\varphi$  on kyseisen suoran ja positiivisen reaaliakselin välinen kulma ja annetaan sen kasvaa arvosta 0 arvoon  $\pi$ , vastaava  $f$ :n arvo kiertää vakionopeudella vastapäivään yksikköympyrän kehän pisteestä 1 lähtien. (Piirrä kuva!)

## Funktion jatkuvuus

Kompleksimuuttujaisen funktion jatkuvuus määritellään samalla tavalla kuin reaali-tilanteessa. Pelkän jatkuvuuden tarpeisiin riittää miettiä kuvauksia  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ , jossa  $A \subset \mathbb{C}$  on yleinen epätyhjä osajoukko. Myöhemmin kun ryhdymme tutkimaan ns. analyttisiä funktioita (kompleksianalyysin pääaihepiiri), lähtöjoukko  $A$  tulee lähes poikkeuksetta olemaan avoin - emme kuitenkaan tee tätä oletusta vielä tässä luvussa.

**2.13 Määritelmä.** Olkoon  $A \subset \mathbb{C}$  ja  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ . Funktio  $f$  on *jatkuva pisteessä*  $a \in A$ , jos jokaisella  $\epsilon > 0$  on olemassa  $\delta = \delta(\epsilon)$  siten, että

$$|f(z) - f(a)| < \epsilon, \quad \text{kun } z \in A \cap D(a, \delta).$$

Funktio  $f$  on *jatkuva joukossa*  $A$ , jos se on jatkuva jokaisessa  $A$ :n pisteessä.

Funktion  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  reaaliosa  $\operatorname{Re} f$  ja imaginaariosa  $\operatorname{Im} f$  määritellään pisteittäin kaavoilla

$$(\operatorname{Re} g)(z) = \operatorname{Re}(g(z)), \quad (\operatorname{Im} g)(z) = \operatorname{Im}(g(z)).$$

Huomaa, että nämä ovat reaaliarvoisia funktioita, joille jatkuvuuden käsite on täsmälleen sama kuin vektorianalyysin kurssilla käsitelty jatkuvuus. Kolmioepäyhtälö osoittaa (vrt. lause 2.6), että  $f$  on jatkuva pisteessä  $a$  jos ja vain jos  $\operatorname{Re} f$  ja  $\operatorname{Im} f$  ovat molemmat jatkuvia pisteessä  $a$ .

Palautetaan myös mieleen raja-arvon yhteys funktion jatkuvuuteen. Olkoon  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ja  $a \in A$ . On kaksi mahdollisuutta: Piste  $a$  voi olla  $A$ :n kasautumispiste; tällöin  $f$  on jatkuva  $a$ :ssa jos ja vain jos  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = f(a)$ . Muussa tapauksessa  $a$  on  $A$ :n *erakkopiste* (eli  $A \cap D(a, r) = \{a\}$  kyllin pienillä  $r$ ), jolloin  $f$  on automaattisesti jatkuva  $a$ :ssa.

**2.14 Esimerkki.** Funktio  $f(z) = z^2$  on jatkuva koko  $\mathbb{C}$ :ssä. Jos nimittäin  $a \in \mathbb{C}$  ja  $\epsilon > 0$ , niin

$$|f(z) - f(a)| = |(z+a)(z-a)| \leq (1+2|a|)|z-a| < \epsilon,$$

kun  $|z-a| < 1$  (jolloin  $|z| < 1+|a|$ ) ja lisäksi  $|z-a| < \epsilon/(1+2|a|)$ .

Käytännössä on kovin työlästä todistaa annetun funktion jatkuvuus lähtien jatkuvuuden määritelmästä. Siksi turvaudumme usein seuraaviin perustuloksiin; nämäkin todistetaan täysin samoin kuin vastaavat säännöt reaalfunktioille (yksityiskohdat ylim. HT).

**2.15 Lause.** Oletetaan, että  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ja  $g: A \rightarrow \mathbb{C}$  ovat jatkuvia pisteessä  $a \in A$ . Tällöin funktiot  $f+g$  ja  $fg$  ovat jatkuva  $a$ :ssa. Lisäksi jos  $g(a) \neq 0$ , niin funktio  $f/g$  on määritelty ainakin joukossa  $A \cap D(a, r)$  kyllin pienellä  $r > 0$  ja jatkuva  $a$ :ssa.

Samoin pätee, että jatkuvista funktioista yhdistetty funktio on jatkuva:

**2.16 Lause.** Olkoot  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ja  $g: A' \rightarrow \mathbb{C}$  funktioita siten, että  $f(A) \subset A'$ . Jos  $f$  on jatkuva pisteessä  $a \in A$  ja  $g$  on jatkuva pisteessä  $f(a)$ , niin  $g \circ f$  on jatkuva pisteessä  $a$ .

Lauseen 2.15 nojalla näemme esimerkiksi, että kaikki kompleksiset *polynomit*

$$P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \cdots + a_nz^n \quad (a_0, \dots, a_n \in \mathbb{C})$$

ovat jatkuvia koko kompleksitasossa  $\mathbb{C}$ . Samoin kaikki *rationaalifunktiot*  $R(z) = P(z)/Q(z)$ , jossa  $P$  ja  $Q$  ovat kompleksisia polynomeja, ovat jatkuvia niissä  $\mathbb{C}$ :n pisteissä, joissa  $Q(z) \neq 0$ .

Toisinaan on hyödyllistä tietää, että funktion jatkuvuus voidaan karakterisoida käyttämällä vain ympäristöjen (eli avoimen joukon) käsitettä tai myös jonojen avulla:

**2.17 Lause.** Olkoon  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  ja  $a \in \mathbb{C}$ . Seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

- $f$  on jatkuva pisteessä  $a$ .
- Aina kun  $V \subset \mathbb{C}$  on pisteen  $f(a)$  ympäristö, on olemassa pisteen  $a$  ympäristö  $U \subset A$ , jolle  $A \cap U \subset f^{-1}(V)$ .
- Jokaisella jonolla  $(z_n)$   $A$ :n pisteitä, jolle  $z_n \rightarrow a$ , on voimassa  $f(z_n) \rightarrow f(a)$ .

*Todistus.* Osoitetaan, että  $a$  ja  $b$  ovat yhtäpitävät, ja jätetään  $c$ :n yhtäpitävyys harjoitustehtäväksi.

Oletetaan, että  $f$  on jatkuva pisteessä  $a$  ja  $V$  on  $f(a)$ :n ympäristö eli avoin joukko, joka sisältää  $f(a)$ :n. Tällöin on olemassa  $\epsilon > 0$ , jolle  $D(f(a), \epsilon) \subset V$ , ja jatkuvuuden määritelmän nojalla voimme löytää luvun  $\delta > 0$  siten, että jokaiselle  $z \in A \cap D(a, \delta)$  pätee  $f(z) \in D(f(a), \epsilon)$ , mikä merkitsee, että  $A \cap D(a, \delta) \subset f^{-1}(D(f(a), \epsilon)) \subset f^{-1}(V)$ . Siispä  $U = D(a, \delta)$  on halutunlainen ympäristö  $a$ :lle.

Kääntäen: jos oletetaan  $b$ -ehto ja  $\epsilon > 0$  on mielivaltainen, niin valitsemalla  $V = D(f(a), \epsilon)$  ja sen jälkeen  $\delta > 0$  niin pieneksi, että  $D(a, \delta) \subset U$ , nähdään, että  $f$  on jatkuva pisteessä  $a$ .  $\square$

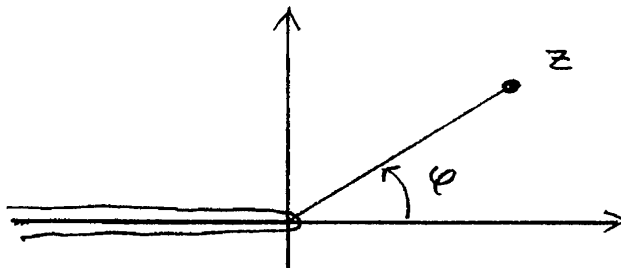
Tarkastellaan vielä argumenttifunktion  $f(z) = \arg(z)$  jatkuvuutta; argumenttifunktio ja sen tulkinnat tulevat jatkossa hyödynnetyksi useammassakin eri yhteydessä.

Kuten Luvussa 1 opimme, kompleksiluvun  $z = re^{i\varphi}$  argumentti  $\varphi = \arg(z)$  on määritelty vain  $2\pi$ :n monikertaa vaille, eli yhteen lukuun  $z$  voi liittää äärettömän monta argumentin eri arvoa  $\varphi + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Jotta argumentista saadaan yksiarvoinen *funktio*, on kompleksitaso "leikattava" jostakin kohdasta - voimme valita leikkauksen kohdan, tilanteesta riippuen, oman mieleemme mukaan. Tällöin puhutaan argumentin eri haaroista.

Useimmiten tarkastellaan *argumentin päähaaraa*

$$(2.18) \quad \arg z \in (-\pi, \pi), \quad z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0],$$

jolloin kompleksitaso on siis leikattu pitkin negatiivista reaaliakselia.



Leikattu kompleksitaso  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Kuvassa  $\varphi = \arg(z)$ .

Toinen usein käytetty argumentin haara on  $0 < \arg(z) < 2\pi$ , jolloin argumentti saa vain positiivisia arvoja. Nyt kompleksitaso tulee leikattua pitkin positiivista reaaliakselia (Piirrä kuva!).

**2.19 Lause.** *Argumentin päähaara*  $f(z) = \arg(z) \in (-\pi, \pi)$  on jatkuva joukossa  $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ .

*Todistus.* Argumentin päähaaran määrittelyjoukko  $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  on avoin  $\mathbb{C}$ :n osajoukko. Kiinnitetään piste  $a \in A$ , ja näytetään  $f$ :n jatkuvuus tuossa pisteessä. Voimme olettaa että  $|a| = 1$ , sillä selvästikin  $f(z) = f\left(\frac{z}{|a|}\right)$ .

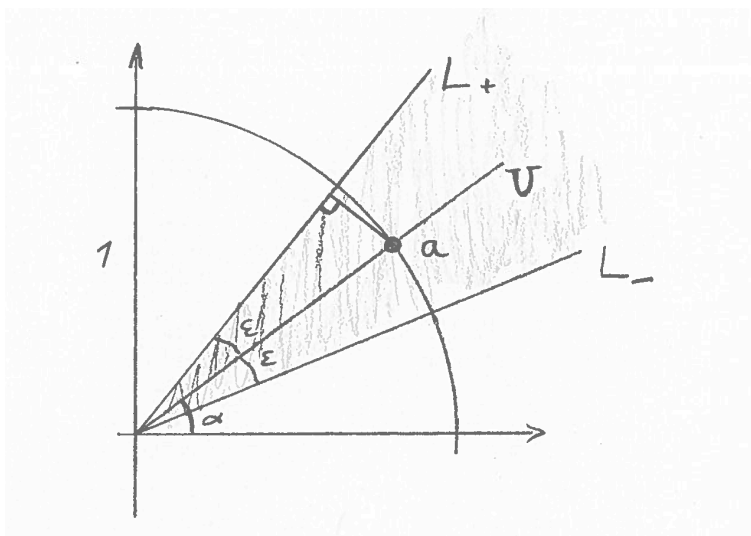
Kuten kaavassa (1.25),  $a = e^{i\alpha}$ , missä  $\alpha = \arg a \in (-\pi, \pi)$ . Olkoon sitten  $\epsilon > 0$ ; voimme olettaa että  $\epsilon < \min\{|\alpha - \pi|, |\alpha + \pi|, 1\}$ , ja haluamme löytää luvun  $\delta > 0$  niin että

$$f(D(a, \delta)) \subset (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon).$$

On mukavinta tarkastella sektoria  $U = \{re^{i\varphi} : r > 0, \alpha - \epsilon < \varphi < \alpha + \epsilon\}$ , sillä  $f(U) = (\alpha - \epsilon, \alpha + \epsilon)$ . Riittää siis löytää avoin kiekko  $D(a, \delta)$  joka sisältyy sektoriin  $U$ . Koska  $|a| = 1$ , pisteen  $a$  etäisyys sektorin reunasuorista  $L_{\pm} = \{z : \arg(z) = \alpha \pm \epsilon\}$  saadaan geometrisesti

$$\text{dist}(a, L_{\pm}) = \sin \epsilon,$$

virt. alla oleva kuva.



Voimme siis valita  $\delta = \sin \epsilon \in (0, 1)$ . □

Toisaalta, päähaarafunktiota  $f(z) = \arg(z) \in (-\pi, \pi)$  ei voida laajentaa jatkuvaksi funktioksi mihinkään pisteeseen  $a \in (-\infty, 0]$  negatiivisella reaaliakselilla: Jos  $a = 0$ , kuten esimerkissä 2.12  $z_n = \frac{1}{n}e^{i\theta} \rightarrow 0$ , mutta arvoksi  $f(z_n) = \theta$  voidaan mikä tahansa luku väliltä  $(-\pi, \pi)$ . Jos taas  $a = -r < 0$ , voimme lähestyä  $a$ :ta joukossa  $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  esimerkiksi pitkin  $r$ -säteistä ympyrää; jos lähestyminen tapahtuu reaaliakselin yläpuolelta,  $f(z) \rightarrow \pi$ , jos alapuolelta,  $f(z) \rightarrow -\pi$ .

### Yhtenäisyydestä

Muutamissa kohdin kurssilla tarvitsemme joitakin tietoja kompleksitason osajoukkojen yhtenäisyydestä. Itse asiassa helpompi polkuyhtenäisyyden käsite on meille riittävä ja myös käyttökelpoisempi. Viittaamme lisätietojen ja tulosten todistusten osalta jälleen kurssiin Topologia I. Lukija voinee sivuuttaa tämän jakson ensimmäisellä lukukerralla ja palata siihen myöhemmin sitä mukaa kun tarvetta ilmenee.

Oletamme koko ajan, että  $A$  on kompleksitason osajoukko. Havainnollisesti sanoen  $A$  on yhtenäinen silloin, kun sitä ei voi jakaa avoimien joukkojen avulla pistevieraisiin osiin:

**2.20 Määritelmä.** Joukko  $A$  on *epäyhtenäinen*, jos on olemassa avoimet  $U, V \subset \mathbb{C}$  siten, että a)  $A \subset U \cup V$ , b)  $U \cap V \cap A = \emptyset$  ja c)  $U \cap A \neq \emptyset \neq V \cap A$ . Muuten  $A$  on *yhtenäinen*.

Palautetaan mieleen, että jatkuvaa kuvausta  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  ( $a < b$ ) sanotaan joukon  $A$  *poluksi*. Tarvittaessa voimme kirjoittaa

$$\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) = \gamma_1(t) + i\gamma_2(t), \quad a \leq t \leq b,$$

jossa  $\gamma_1 = \operatorname{Re} \gamma$  ja  $\gamma_2 = \operatorname{Im} \gamma$ . Polku  $\gamma$  *yhdistää* pisteet  $\gamma(a)$  ja  $\gamma(b)$ , joita kutsutaan ko. polun *päättepisteiksi*.

Jos  $z, w \in \mathbb{C}$  ovat annettuja, voidaan muodostaa *janapolku*

$$\gamma(t) = z + t(w - z) = (1 - t)z + tw, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

joka yhdistää pisteet  $z = \gamma(0)$  ja  $w = \gamma(1)$ . Tämän kuvajoukko  $\gamma([0, 1])$  on *jana*, jolle voimme käyttää merkintää  $[z, w]$ , näin yleistäen lukusuoran suljetun välin (eli janan) merkinnän. Äärellinen yhdiste peräkkäisistä janoista, ts. joukko muotoa

$$\operatorname{mur}(z_0, z_1, \dots, z_n) = [z_0, z_1] \cup [z_1, z_2] \cup \dots \cup [z_{n-1}, z_n],$$

on puolestaan *murtoviiva*, joka yhdistää pisteet  $z_0$  ja  $z_n$ .

**2.21 Määritelmä.** a)  $A$  on *polkuyhtenäinen*, jos jokainen pari  $z, w \in A$  voidaan yhdistää  $A$ :n polulla.

b)  $A$  on *murtoviivayhtenäinen*, jos jokainen pari  $z, w \in A$  voidaan yhdistää murtoviivalla  $A$ :ssa.

c)  $A$  on *konvekksi*, jos jokainen pari  $z, w \in A$  voidaan yhdistää  $A$ :n janapolulla.

Olennaista näissä määritelmässä on, että annetut pisteet yhdistävä polku (tai paremminkin sen kuvajoukko) sisältyy kokonaisuudessaan joukkoon  $A$ . Selvästi aina on voimassa implikaatiot: ”konvekksi”  $\Rightarrow$  ”murtoviivayhtenäinen”  $\Rightarrow$  ”polkuyhtenäinen”. Lisäksi pätee:

**2.22 Lause.** *Jos  $A$  on polkuyhtenäinen, se on yhtenäinen.*

Mitään näistä implikaatioista ei voi kääntää yleiselle  $\mathbb{C}$ :n osajoukolle  $A$ . Jatkossa tulemme kuitenkin pääasiassa työskentelemään avoimissa joukoissa, ja silloin tilanne on paljon miellyttävämpi:

**2.23 Lause.** *Oletetaan, että  $A \subset \mathbb{C}$  on avoin. Seuraavat ehdot ovat yhtäpitävät:*

- a)  $A$  on yhtenäinen.
- b)  $A$  on polkuyhtenäinen.
- c)  $A$  on murtoviivayhtenäinen.

Avoin joukko, jolla on jokin (ja siis kaikki) näistä ominaisuuksista, on monessa mielessä luonnollinen alusta tehdä matemaattista analyysiä. Tällaisella joukolla onkin oma nimityksensä:

**2.24 Määritelmä.** Avoin ja yhtenäinen joukko on *alue*.

**2.25 Esimerkki.** a) Jokainen avoin kiekko  $D(z, r)$  on konvekssi alue.

b) Vaakasuora yhdensuuntaisvyö  $\{z : a < \operatorname{Im} z < b\}$  ( $a < b$ ) ja ylempi puolitaso  $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  ovat konvekseja alueita.

c) Punkteerattu taso  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ja negatiivista reaaliakselia pitkin aukileikattu taso  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  ovat alueita. Ne eivät ole konvekseja, mutta jokainen pistepari voidaan niissä yhdistää kahdesta janasta koostuvalla murtoviivalla (totea tämä kuvan avulla).

Yhtenäisyys ja polkuyhtenäisyys ovat kumpikin ominaisuuksia, jotka säilyvät jatkuvassa kuvauksessa:

**2.26 Lause.** *Olkoon  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  jatkuva. Jos  $A$  on yhtenäinen (vast. polkuyhtenäinen), myös  $f(A)$  on yhtenäinen (vast. polkuyhtenäinen).*

*Todistus.* Polkuyhtenäisyydelle todistus on hyvin helppo: Olkoot  $f(z)$  ja  $f(w)$  kuvan  $f(A)$ :n pisteitä, jossa  $z, w \in A$ . Jos  $A$  on polkuyhtenäinen, voidaan valita polku  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ , joka yhdistää  $z$ :n ja  $w$ :n. Tällöin  $f \circ \gamma$  on  $f(A)$ :n polku, joka yhdistää  $f(z)$ :n ja  $f(w)$ :n.  $\square$

Lopuksi muutama sana (yhtenäisistä) komponenteista. Jos joukko  $A$  on epäyhtenäinen, se voidaan osittaa pistevieraisiin maksimaalisiin yhtenäisiin osajoukkoihinsa, joita kutsutaan  $A$ :n komponenteiksi. Tarkemmin sanoen: Jokaisella  $z \in A$  voidaan määrittellä  $A$ :n osajoukko

$$C(z, A) = \bigcup \{A' : z \in A' \subset A, A' \text{ yhtenäinen}\}.$$

Jokainen joukko  $C(z, A)$  on yhtenäinen: kyseessä on laajin yhtenäinen  $A$ :n osajoukko, joka sisältää pisteen  $z$ . Tästä seuraa, että kahta eri pistettä  $z$  vastaavat joukot ovat joko samat tai erilliset. Koska joukkojen  $C(z, A)$  ( $z \in A$ ) yhdiste on selvästi  $A$ , nähdään, että kukin  $A$ :n piste kuuluu täsmälleen yhteen tällaiseen joukkoon eli *komponenttiin*.

Jos  $A$  on avoin, niin kaikki sen komponentit ovat myös avoimia ja siis alueita. Tämä seuraa siitä, että jos  $z$  on mielivaltainen  $A$ :n piste, niin  $D(z, r) \subset A$  jollakin  $r > 0$ , ja koska kiekot ovat aina yhtenäisiä (jopa konvekseja),  $D(z, r)$  sisältyy kokonaisuudessaan samaan komponenttiin kuin  $z$ .

**2.27 Esimerkki.** Olkoon  $S^1 = \{z : |z| = 1\}$  yksikköympyrä ja  $A = \mathbb{C} \setminus S^1$ .  $A$  on avoin ja epäyhtenäinen. Sillä on kaksi komponenttia: avoin kiekko  $D(0, 1)$  ja joukko  $\{z : |z| > 1\}$ .

## 3 Analytyttiset funktiot

Määrittelemme aluksi kompleksisen derivaatan käsitteen ja sen avulla analyttiset funktiot. Esitämme myös joitakin analyttisten funktioiden alkeisominaisuuksia, kuten derivointisääntöjä. Tämän jälkeen johdamme Cauchyn ja Riemannin yhtälöt; ne ovat ensimmäisen kertaluvun osittaisdifferentiaaliyhtälöitä, jotka karakterisoivat analyttisten funktioiden reaali- ja imaginaariosat.

### Kompleksinen derivaatta

**3.1 Määritelmä.** Olkoon  $A \subset \mathbb{C}$  epätyhjä ja  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  jokin funktio.

a) Jos  $z_0$  on joukon  $A$  sisäpiste, niin funktiolla  $f$  on (*kompleksinen*) *derivaatta*  $f'(z_0)$  pisteessä  $z_0$ , mikäli on olemassa erotusosamäärän raja-arvo

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = f'(z_0).$$

On tärkeätä huomata, että tässä  $h$  on kompleksiluku ja raja-arvo vaaditaan kompleksisessä mielessä (lähestyypä  $h$  nollaa ”miten tahansa” kompleksitasossa). Koska  $z_0$  on  $A$ :n sisäpiste,  $z_0 + h \in A$  kunhan vain  $|h|$  on kyllin pieni.

b)  $f$  on *analyttinen pisteessä*  $z_0 \in A$ , mikäli on olemassa avoin kiekko  $D(z_0, r) \subset A$  siten, että  $f$ :llä on kompleksinen derivaatta jokaisessa ko. kiekon pisteessä.

c) Jos  $A$  on avoin,  $f$  on *analyttinen joukossa*  $A$ , mikäli se on analyttinen jokaisessa  $A$ :n pisteessä tai yhtäpitävästi sillä on kompleksinen derivaatta jokaisessa  $A$ :n pisteessä.

Tarvittaessa voidaan käyttää derivaattafunktiolle muitakin merkintöjä, esimerkiksi

$$\frac{d}{dz} f(z) = f'(z).$$

Kompleksisen derivaatan määritelmä on pinnallisesti hyvin samankaltainen kuin tavallisen reaalisen derivaatan määritelmä. Sillä on kuitenkin paljon vahvemmat ominaisuudet ja laajakantoisemmat seuraukset. Tulemme esimerkiksi todistamaan myöhemmin, että jokainen analyttinen funktio on itse asiassa äärettömän monta kertaa derivoituva! Tämä ei tietenkään päde yhden reaalimuuttujan funktioille. Selvitämme kompleksisen derivaatan ja reaalisten (osittais)derivaattojen suhdetta hieman myöhemmin, kun puhumme Cauchyn ja Riemannin yhtälöistä.



**3.2 Esimerkki.** a) Vakiofunktio  $f(z) \equiv c$ , jossa  $c \in \mathbb{C}$ , on analyyttinen koko  $\mathbb{C}$ :ssä ja sen derivaatta on 0.

b) Olkoon  $f(z) = az$ , jossa  $a \in \mathbb{C}$ . Tällöin

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{ah}{h} = a \rightarrow a,$$

kun  $h \rightarrow 0$ . Siten  $f$  on analyyttinen  $\mathbb{C}$ :ssä ja  $f'(z) = a$ .

c) Olkoon  $n$  positiivinen kokonaisluku. Tutkitaan potenssifunktiota  $z^n$ . Olkoon  $z_0 \in \mathbb{C}$  ja  $h \neq 0$ . Tällöin

$$(z_0 + h)^n - z_0^n = h \cdot ((z_0 + h)^{n-1} + (z_0 + h)^{n-2}z_0 + \cdots + (z_0 + h)z_0^{n-2} + z_0^{n-1}),$$

joten jakamalla  $h$ :lla puolittain saamme

$$\frac{(z_0 + h)^n - z_0^n}{h} = (z_0 + h)^{n-1} + (z_0 + h)^{n-2}z_0 + \cdots + (z_0 + h)z_0^{n-2} + z_0^{n-1},$$

joka lähestyy lukua  $nz_0^{n-1}$ , kun  $h \rightarrow 0$ . Potenssifunktio  $z^n$  on siis analyyttinen koko kompleksitasossa ja sen derivaatta on  $nz^{n-1}$ .

d) Tutkitaan funktiota  $f(z) = \bar{z}$ . Jos  $h = |h|e^{i\varphi} \neq 0$ , niin

$$\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{\bar{h}}{h} = \frac{e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi}} = e^{-2i\varphi}.$$

Mutta tällä on erisuuri vakioarvo kullakin origon kautta kulkevalla suoralla (vrt. esim. 2.102.12) ja siten ei raja-arvoa, kun  $h \rightarrow 0$ . Siis  $f$ :llä ei ole kompleksista derivaattaa missään pisteessä. Huomaa kuitenkin, että tason  $\mathbb{R}^2$  kuvauksena tulkittuna  $f(x, y) = (x, -y)$  on jopa  $\mathbb{R}$ -lineaarinen ja erityisesti sen kummallakin koordinaattifunktiolla on kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat.

Opetus: Vaikka kuvaus olisi reaalifunktiona hyvinkin siisti ja sileä, sillä ei aina ole kompleksista derivaattaa!

### Derivointisääntöjä

Osoittautuu, että kompleksinen derivaatta noudattaa samanlaisia laskusääntöjä kuin reaalimuuttujan derivaatta. Näiden johtamisessa ja muulloinkin on usein kätevää muotoilla derivaatan olemassaolo seuraavasti:

**3.3 Apulause.** *Funktiolla  $f$  on pisteessä  $z_0$  derivaatta  $f'(z_0) = a$  jos ja vain jos on voimassa kehitemmä*

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + ah + h\epsilon(h)$$

*kaikille  $h$  jossakin  $0$ :n ympäristössä ja jossa  $\lim_{h \rightarrow 0} \epsilon(h) = 0$ .*

*Erityisesti, jos  $f$ :llä derivaatta pisteessä  $z_0$ , silloin  $f$  on jatkuva  $z_0$ :ssa !*

Tässä lauseke  $\epsilon(h)$  tietysti riippuu myös  $z_0$ :sta ja  $f$ :stä, joten selvyuden vaatiessa voidaan esimerkiksi kirjoittaa  $\epsilon_f(h; z_0)$ . Tämän kehittelyn avulla nähdään heti, että derivoituvuudesta seuraa funktion jatkuvuus pisteessä  $z_0$  (ts.  $f(z_0 + h) \rightarrow f(z_0)$ , kun  $h \rightarrow 0$ ).

*Todistus.* Jos  $f'(z_0) = a$ , kyseinen kehitelmä totetuu, kun määritellään  $\epsilon(0) = 0$  ja  $\epsilon(h) = (f(z_0 + h) - f(z_0))/h - a$ . Kääntäen, jos annettu kehitelmä on voimassa, niin  $(f(z_0 + h) - f(z_0))/h = a + \epsilon(h) \rightarrow a$ , kun  $h \rightarrow 0$ .  $\square$

**3.4 Lause.** Oletetaan, että  $f$  ja  $g$  ovat kompleksisesti derivoituvia pisteessä  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Tällöin:

a)  $f \pm g$  ovat derivoituvia  $z_0$ :ssa ja

$$(f \pm g)'(z_0) = f'(z_0) \pm g'(z_0).$$

b)  $fg$  on derivoituva  $z_0$ :ssa ja

$$(fg)'(z_0) = f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0).$$

c) Jos  $g(z_0) \neq 0$ , niin  $f/g$  on määritelty jossain  $z_0$ :n ympäristössä ja derivoituva  $z_0$ :ssa sekä

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z_0) = \frac{f'(z_0)g(z_0) - f(z_0)g'(z_0)}{g(z_0)^2}.$$

*Todistus.* Kun  $|h|$  on riittävän pieni, pätevät yo. apulauseen mukaiset kehitelmät

$$(3.5) \quad \begin{aligned} f(z_0 + h) &= f(z_0) + f'(z_0)h + h\epsilon_f(h), \\ g(z_0 + h) &= g(z_0) + g'(z_0)h + h\epsilon_g(h), \end{aligned}$$

jossa  $\epsilon_f(h)$  ja  $\epsilon_g(h)$  lähestyvät 0:aa, kun  $h \rightarrow 0$ .

a) Summaamalla tai vähentämällä toisistaan nämä kehitelmät saadaan

$$f(z_0 + h) \pm g(z_0 + h) = f(z_0) \pm g(z_0) + (f'(z_0) \pm g'(z_0))h + h(\epsilon_f(h) \pm \epsilon_g(h)).$$

Tässä  $\epsilon_f(h) \pm \epsilon_g(h) \rightarrow 0$ , kun  $|h| \rightarrow 0$ , joten funktioilla  $f \pm g$  on vaadittua muotoa olevat kehitelmät.

b) Kertomalla kehitelmät (3.5) puolittain keskenään saadaan

$$(fg)(z_0 + h) = (fg)(z_0) + (f'(z_0)g(z_0) + f(z_0)g'(z_0))h + h\epsilon(h),$$

jossa

$$\epsilon(h) = hf'(z_0)g'(z_0) + (f(z_0) + hf'(z_0))\epsilon_g(h) + (g(z_0) + hg'(z_0))\epsilon_f(h) \rightarrow 0,$$

kun  $h \rightarrow 0$ . Tämä todistaa tuloa koskevan väitteen.

c) Riittää todistaa väite funktiolle  $1/g$ , sillä  $f/g$  voidaan käsitellä tämän ja edellisen kohdan avulla. Jatkuvuuden nojalla  $g(z_0 + h) \neq 0$ , kunhan  $|h|$  on kyllin pieni. Nyt voimme laskea

$$\frac{1}{g(z_0 + h)} - \frac{1}{g(z_0)} = \frac{g(z_0) - g(z_0 + h)}{g(z_0 + h)g(z_0)} = \frac{-g'(z_0)h - h\epsilon_g(h)}{g(z_0 + h)g(z_0)}.$$

Siten jos  $h \rightarrow 0$ ,

$$\frac{1}{h} \left( \frac{1}{g(z_0 + h)} - \frac{1}{g(z_0)} \right) = \frac{-g'(z_0) - \epsilon_g(h)}{g(z_0 + h)g(z_0)} \rightarrow -\frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2},$$

mikä on haluttu kaava funktiolle  $1/g$ .  $\square$

**3.6 Seuraus.** Jokainen kompleksikertoiminen polynomi  $P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0$  on analyyttinen koko  $\mathbb{C}$ :ssä. Samoin rationaalifunktio  $R = P/Q$ , jossa  $P$  ja  $Q$  ovat em. tyyppiä olevia polynomeja, on analyyttinen  $\mathbb{C}$ :ssä lukuunottamatta  $Q$ :n nollakohtia.

Koko tasossa analyyttisiä funktioita kutsutaan usein *kokonaisiksi funktioiksi*.

**3.7 Esimerkki.** a) Funktio  $f(z) = 1/z$  on analyyttinen punkteeratussa tasossa  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ja  $f'(z) = -1/z^2$ .

b) Erittäin tärkeän rationaalifunktioiden luokan muodostavat *Möbius-kuvaukset*  $(az + b)/(cz + d)$ , jossa  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ja  $ad - bc \neq 0$ . Tällainen on analyyttinen kaikkialla lukuunottamatta pistettä  $-d/c$  tapauksessa  $c \neq 0$ . Tutkimme näitä kuvauksia myöhemmin.

c) Tarkastellaan vielä funktiota  $f(z) = |z|^2 = z\bar{z}$ . Koska  $(f(h) - f(0))/h = \bar{h} \rightarrow 0$ , kun  $h \rightarrow 0$ ,  $f$ :llä on origossa kompleksinen derivaatta  $f'(0) = 0$ . Kuitenkaan  $f$ :llä ei ole derivaattaa missään muussa pisteessä  $z_0 \neq 0$ ; jos nimittäin olisi, myös funktio  $\bar{z} = f(z)/z$  olisi kyseisessä pisteessä derivoituva, mikä ei ole totta (esim. 3.2d). Siispä määritelmän mukaan  $f$  ei ole analyyttinen missään, ei edes 0:ssa.

Huomaa, että  $f$  voidaan myös ilmaista kuvauksena  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Se on siis  $\mathbb{R}^2$ :n polynomi, ja sillä selvästikin on kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat.

Kompleksiselle derivaatalle pätee myös tuttu ketjusääntö eli yhdistetyn funktion derivointisääntö:

**3.8 Lause.** Olkoot  $A, A' \subset \mathbb{C}$  ja  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  sekä  $g: A' \rightarrow \mathbb{C}$  siten, että  $f(A) \subset A'$ . Oletetaan, että  $z_0$  on  $A$ :n sisäpiste ja  $f(z_0)$  on  $A'$ :n sisäpiste. Jos  $f$  on derivoituva  $z_0$ :ssa ja  $g$  on derivoituva  $f(z_0)$ :ssa, niin  $g \circ f$  on derivoituva  $z_0$ :ssa ja

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0)) f'(z_0).$$

*Todistus.* Merkitään  $w_0 = f(z_0)$ . Otetaan taas käyttöön apulauseen 3.3 antamat kehitelmät:

$$\begin{aligned} f(z_0 + h) &= f(z_0) + f'(z_0)h + h\epsilon_f(h), \\ g(w_0 + k) &= g(w_0) + g'(w_0)k + k\epsilon_g(k). \end{aligned}$$

On syytä huomata, että jatkuvuuden nojalla  $f(z_0 + h) \in A'$ , kunhan  $|h|$  on kyllin pieni.

Sovelletaan aluksi  $f$ :n kehitelmää ja sitten  $g$ :n kehitelmää valinnalla  $k = k(h) = f'(z_0)h + h\epsilon_f(h)$ , jolloin saadaan

$$\begin{aligned} g(f(z_0 + h)) &= g(f(z_0) + f'(z_0)h + h\epsilon_f(h)) \\ &= g(w_0) + g'(w_0)[f'(z_0)h + h\epsilon_f(h)] + k(h)\epsilon_g(k(h)) \\ &= g(w_0) + g'(w_0)f'(z_0)h \\ &\quad + h[g'(w_0)\epsilon_f(h) + f'(z_0)\epsilon_g(k(h)) + \epsilon_f(h)\epsilon_g(k(h))]. \end{aligned}$$

Kun  $h \rightarrow 0$ , niin selvästi  $k(h) \rightarrow 0$  ja siten viimeinen hakasissa oleva lauseke  $\rightarrow 0$ . Näin ollen yhdistetyllä funktiolla  $g \circ f$  on apulauseen 3.3 vaatima kehitelmä pisteessä  $z_0$  ja  $(g \circ f)'(z_0) = g'(w_0)f'(z_0)$  kuten halusimmekin.  $\square$

Yhteenvetona edellä esitetyistä tuloksista saamme mm.

- Jokainen analyyttinen funktio on jatkuva.
- Jos  $f$  ja  $g$  analyyttisissä avoimessa joukossa  $A$ , silloin  $f \pm g$  ja  $fg$  ovat analyyttisiä; jos  $g(z) \neq 0$   $A$ :ssa, silloin myös  $f/g$  on analyyttinen  $A$ :ssa.
- Muuttujan  $z$  polynomit ovat analyyttisiä; samoin  $z$ :n rationaalifunktiot nimittäjänsä nollakohtien ulkopuolella.
- Jos  $A, A'$  avoimia,  $f$  analyyttinen  $A$ :ssa,  $g$  analyyttinen  $A'$ :ssa ja  $f(A) \subset A'$ , silloin yhdistetty kuvaus  $g \circ f$  on analyyttinen  $A$ :ssa.

### Kompleksifunktion kuvausominaisuuksista

Koska analyyttisen funktion määrittelyjoukko sekä kuvajoukko ovat tason osajoukkoja, on analyyttisiä funktioita usein hyvä tarkastella niiden määräämän geometrisen muunnoksen kautta. Kuvausominaisuudet muodostavat laajan aihepiirin, johon palataan useasti myöhemmin; tässä tarkastellaan aluksi muutamia esimerkkejä.

**3.9 Esimerkki.** a) Kun  $a \in \mathbb{C}$ , kuvaus  $f : z \mapsto z + a$  on tason  $\mathbb{C}$  yhdensuuntaissiirto.

b) Tarkastellaan sitten kuvausta  $f : z \mapsto az$ , missä  $a \in \mathbb{C}$ .

- Palautetaan mieleen, että jos  $a > 0$  (ts.  $a$  on positiivinen reaaliluku), niin  $f$  on homotetia eli venytys tai kutistus origosta lähtevien puolisuorien suunnassa.
- Jos taas  $a = e^{i\alpha}$ ,  $f$  on kierto origon ympäri kulman  $\alpha$  verran.
- Yleisesti jos  $a \neq 0$  ja  $a$ :n napaesitys on  $a = |a|e^{i\alpha}$ , nähdään, että  $f(z) = |a|e^{i\alpha}z$  on yhdistelmä mainittuja kahta tyyppiä olevista muunnoksista.

c) Kuten yllä näimme, funktio  $f(z) = 1/z$  on analyyttinen punkteeratussa tasossa  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Ymmärtääksemme tämän kuvauksen toiminnan paremmin, panemme merkille, että  $f$  on bijektio  $\mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^*$ , joka on myös itsensä käänteiskuvaus. Käyttämällä napaesitystä  $z = re^{i\varphi}$  nähdään lisäksi, että

$$f(re^{i\varphi}) = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}.$$

Tämä voidaan tulkita niin, että  $f$  on yhdistelmä kahdesta peilauksesta: yhtäältä  $re^{i\varphi} \mapsto (1/r)e^{i\varphi}$ , joka on peilaus yksikköympyrän suhteen, ja toisaalta liittoluvun otto  $z \mapsto \bar{z}$ , joka puolestaan on peilaus reaaliakselin suhteen. Kumpikaan näistä ei ole analyyttisiä (jälkimmäisen osalta ks. esimerkki 3.2d) mutta niistä yhdistetty funktio  $f$  siis on!

d) Tulemme myöhemmin näkemään, että yleisemmin jokainen ensimmäisen asteen rationaalifunktio, eli Möbiuskuvaus  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  voidaan esittää yhdisteenä peilauksista ympyröiden ja suorien suhteen.

e) Edellisissä esimerkeissä jokainen kuvaus oli bijektio, mutta näin ei tietenkään tarvitse olla yleisellä analyyttisellä funktiolla  $f$ . Tarkastellaan esimerkiksi funktiota  $f : z \mapsto z^2$ ,  $z \in \mathbb{C}$ , jonka määräämän kuvauksen ominaisuudet selviävät parhaiten napaesityksen avulla,  $f(re^{i\theta}) = r^2 e^{i2\theta}$ .

Selvästi  $f(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$ , mutta huomataan, että jos  $z$  kiertää kerran origon ympäri, esim. yksikköympyrää pitkin, silloin kuvapiste  $f(z)$  kiertää origon ympäri kahdesti! Edelleen,  $f$  kuvaa vastaluvut samoiksi pisteiksi,  $f(-z) = f(z)$ .

Kysymys: Millaiseen joukkoon  $A$  funktio  $f(z) = z^2$  tulee rajoittaa, jotta  $f|_A$  olisi injektio?

### Cauchyn ja Riemannin yhtälöt

Tarkastellaan funktiota  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ , jossa  $A \subset \mathbb{C}$ . Tällöin reaali-osa  $u = \operatorname{Re} f$  ja imaginaari-osa  $v = \operatorname{Im} f$  ovat funktioita  $A \rightarrow \mathbb{R}$  ja  $f = u + iv$  eli

$$(3.10) \quad f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Tutkimme nyt, miten  $f$ :n kompleksinen derivoituvuus (tai analyyttisyys) määritelmän 3.1 mielessä voidaan ymmärtää funktioiden  $u$  ja  $v$  sekä niiden tavallisten osittaisderivaattojen avulla. Samalla saamme selityksen sille, miksi vaikkapa esimerkkien 3.2d ja 3.9c funktiot eivät ole analyyttisiä siitä huolimatta, että niiden reaali- ja imaginaariosat ovat hyvin sileitä.

Tarkasteluja varten olkoon  $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$  joukon  $A$  sisäpiste, jossa funktiolla  $f = u + iv$  on kompleksinen derivaatta,  $f'(z_0) = a \in \mathbb{C}$ . Silloin

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{u(z_0 + h) - u(z_0)}{h} + i \frac{v(z_0 + h) - v(z_0)}{h} \right].$$

Kompleksisen derivaatan keskeisen idean mukaan erotusosamäärällä on sama raja-arvo vaikka luku  $h \rightarrow 0$  eri suunnista. Tätä hyödyntäen, otetaan ensin raja-arvo kun  $h = t \in \mathbb{R}$ ,

$$(3.11) \quad a = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0 + t, y_0) - u(x_0, y_0)}{t} + i \frac{v(x_0 + t, y_0) - v(x_0, y_0)}{t} \right] = u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0)$$

Vastaavastaavasti kun  $h = it$ , missä  $t \in \mathbb{R}$ , voimme ottaa raja-arvon

$$(3.12) \quad a = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{u(x_0, y_0 + t) - u(x_0, y_0)}{it} + i \frac{v(x_0, y_0 + t) - v(x_0, y_0)}{it} \right] = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0)$$

Koska raja-arvot (3.11), (3.12) ovat samat, saadaan seuraava tulos:

**3.13 Lause.** Jos funktiolla  $f = u + iv$  on kompleksinen derivaatta pisteessä  $z \in A$ , silloin sekä  $u$ :lla että  $v$ :llä on osittaisderivaatat  $z$ :ssa ja ne toteuttavat **Cauchyn ja Riemannin yhtälöt**

$$u_x(z) = v_y(z), \quad u_y(z) = -v_x(z).$$

Lisäksi pätee

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = v_y(z) - iv_y(z).$$

**3.14 Esimerkki.** Tarkastellaan uudelleen esimerkin 3.2d funktiota  $f(x + iy) = \overline{x + iy} = x - iy$ . Sen reaali-osa on  $u(x, y) = x$  ja imaginaari-osa  $v(x, y) = -y$ . Näin ollen  $u_x = 1 \neq -1 = v_y$ , joten Cauchyn ja Riemannin yhtälöt eivät toteudu eikä  $f$  siis voi olla analyyttinen!

Seuraavaksi haluamme näyttää käänteisen suunnan, eli että Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden avulla voi osoittaa funktion  $f$  kompleksisen derivoituvuuden. Tässä ei kuitenkaan pelkkä  $u$ :n ja  $v$ :n osittaisderivaattojen olemassaolo riitä (vrt. HT3), vaan tarvitaan hieman enemmän.

Palautetaan mieleen vektorianalyysin kurssilta, että funktio  $U: A \rightarrow \mathbb{R}$  on *differentioituva* pisteessä  $(x, y) \in A$ , mikäli pätee kehitemmä

$$U(x + h_1, y + h_2) - U(x, y) = c_1 h_1 + c_2 h_2 + |h|\eta(h),$$

jossa  $h = (h_1, h_2)$  ja  $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2}$  on kyllin pieni sekä  $\eta(h) \rightarrow 0$ , kun  $h \rightarrow 0$ .<sup>1</sup> Tällöin kertoimet  $c_1$  ja  $c_2$  ovat  $U$ :n *osittaisderivaatat* pisteessä  $(x, y)$ ; käytämme merkintöjä

$$U_x(x, y) = \partial_1 U(x, y) = c_1 \quad \text{ja} \quad U_y(x, y) = \partial_2 U(x, y) = c_2.$$

Oletetaan seuraavaksi, että  $z = x + iy$  on  $A$ :n sisäpiste ja yhtälön (3.10) funktio  $f$  on kompleksisesti derivoituva  $z$ :ssa sekä  $f'(z) = a$ . Tällöin apulauseen 3.3 nojalla on voimassa kehitemmä

$$f(z + h) - f(z) = ah + h\epsilon(h),$$

jossa  $\epsilon(h) \rightarrow 0$ , kun  $h \rightarrow 0$ . Kirjoitetaan  $a = a_1 + ia_2$  ja  $h = h_1 + ih_2$ , jolloin  $ah = a_1 h_1 - a_2 h_2 + i(a_2 h_1 + a_1 h_2)$ . Ottamalla yo. kehitemässä puolittain reaali-osat saamme

$$u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) = a_1 h_1 - a_2 h_2 + \operatorname{Re} h\epsilon(h)$$

ja vastaavasti ottamalla imaginaari-osat saamme

$$v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) = a_2 h_1 + a_1 h_2 + \operatorname{Im} h\epsilon(h).$$

Esimerkiksi  $u$ :hun liittyvä ”jäännöstermi” voidaan kirjoittaa  $\operatorname{Re} h\epsilon(h) = |h|\eta(h)$ , jossa  $\eta(h) = |h|^{-1} \operatorname{Re} h\epsilon(h)$  ja  $|\eta(h)| \leq |\epsilon(h)| \rightarrow 0$ , kun  $h \rightarrow 0$ . Samoin voidaan päätellä  $v$ :lle. Saadut kehitemmät ovat siis täsmälleen differentioituvuuden määritelmässä esiintyvää tyyppiä; olemme siis näyttäneet, kompleksisen derivaatan olemassaolo antaa komponenttifunktioille paitsi osittaisderivaattojen olemassaolon, myös differentioituvuuden. Tällä havainnolla pääsemme parantamaan Lausetta 3.13, ja karakterisoimaan analyyttisyyden Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden avulla.

**3.15 Lause.** *Funktiolla  $f = u + iv$  on kompleksinen derivaatta pisteessä  $z$  jos ja vain jos sekä  $u$  että  $v$  ovat differentioituvia  $z$ :ssa ja niiden osittaisderivaatat toteuttavat siinä **Cauchyn ja Riemannin yhtälöt***

$$u_x(z) = v_y(z), \quad u_y(z) = -v_x(z).$$

<sup>1</sup>Ks. esim. O. MARTIO: *Vektorianalyysi*, Limes ry (2. korj. p. 2008), sivut 27–28. Martion kirjassa differentioituvuutta kutsutaan myös derivoituvuudeksi, mutta tätä ei (ainakaan lähtökohtaisesti) pidä sekoittaa meidän käyttämäämme kompleksisen derivoituvuuden käsitteeseen!

Tällöin pätee

$$f'(z) = u_x(z) + iv_x(z) = v_y(z) - iu_y(z).$$

Analyttisen funktion reali- ja imaginaariosa ovat siis väistämättä vahvasti sidoksissa toisiinsa. Imaginaariosan osittaisderivaatat määräytyvät täysin reaaliosan perusteella ja kääntäen !

*Todistus.* Jäljellä on enää ehtojen riittävyyden osoittaminen. Koska funktiot  $u$  ja  $v$  ovat differentioituvia, niin

$$\begin{aligned}u(z+h) - u(z) &= u_x(z)h_1 + u_y(z)h_2 + |h|\eta_1(h), \\v(z+h) - v(z) &= v_x(z)h_1 + v_y(z)h_2 + |h|\eta_2(h),\end{aligned}$$

kun merkitään  $h = (h_1, h_2)$ . Tässä  $\eta_1(h) \rightarrow 0$  ja  $\eta_2(h) \rightarrow 0$ , kun  $h \rightarrow 0$ . Kerrotaan jälkimmäinen yhtälö  $i$ :llä ja lasketaan yhtälöt puolittain yhteen, jolloin saadaan

$$f(z+h) - f(z) = [u_x(z) + iv_x(z)]h_1 + [u_y(z) + iv_y(z)]h_2 + |h|\eta(h),$$

jossa  $\eta(h) = \eta_1(h) + i\eta_2(h)$ . Otetaan nyt huomioon Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Niiden ja kompleksilukujen tulon määritelmän avulla nähdään, että  $[u_y(z) + iv_y(z)]h_2 = [-v_x(z) + iu_x(z)]h_2 = [u_x(z) + iv_x(z)]ih_2$ . Koska  $h = h_1 + ih_2$ , on saatu kehitelmä

$$f(z+h) - f(z) = [u_x(z) + iv_x(z)]h + |h|\eta(h) = ah + |h|\eta(h).$$

missä  $a = u_x(z) + iv_x(z)$ . Jos määrittelemme vielä  $\epsilon(h) = \frac{|h|}{h}\eta(h)$ , niin jäännöstermi saa muodon  $h\epsilon(h)$  ja  $\epsilon(h) \rightarrow 0$ , kun  $h \rightarrow 0$ . Näin ollen olemme Apulauseen 3.3 nojalla todistaneet, että  $f$ :llä on kompleksinen derivaatta pisteessä  $z$  ja sen arvo  $f'(z) = u_x(z) + iv_x(z)$ .  $\square$

**3.16 Huomautus.** Lausetta 3.15 sovellettaessa on hyvä muistaa seuraava tieto vektorianalyysin kurssilta:

Funktio  $U: A \rightarrow \mathbb{R}$  on differentioituva pisteessä  $z$ , jos  $U$ :llä on tässä pisteessä jatkuvat osittaisderivaatat.

Tämä tarkoittaa sitä, että osittaisderivaatat  $U_x$  ja  $U_y$  ovat olemassa jossakin  $z$ :n ympäristössä ja lisäksi ne ovat jatkuvia  $z$ :ssa.

**3.17 Huomautus.** a) Yhteenvedona, ylläolevan Huomautuksen ja Lauseen 3.15 mukaan, jos  $u$ :lla ja  $v$ :llä on avoimessa joukossa  $A \subset \mathbb{C}$  jatkuvat osittaisderivaatat ja jos ne toteuttavat (koko  $A$ :ssa) Cauchyn ja Riemannin yhtälöt, silloin funktio  $f = u + iv$  on analyttinen  $A$ :ssa.

b) Kääntäen, jos  $f$  on analyttinen (avoimessa) joukossa  $A$ , niin Cauchyn ja Riemannin yhtälöt ovat voimassa, ja myöhemmin tulemme näkemään, että  $f$ :n reali- ja imaginaariosalla on  $A$ :ssa kaikkien kertalukujen jatkuvat osittaisderivaatat! Voitaisiin siis kirjoittaa  $u, v \in C^\infty(A)$ .

**3.18 Esimerkki.** a) Tiedämme, että funktio  $f(z) = z^2$  on analyyttinen. Todetaan tämä myös Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden avulla. Koska

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy,$$

on  $f = u + iv$ , jossa  $u(x, y) = x^2 - y^2$  ja  $v(x, y) = 2xy$ . Siispä  $u$  ja  $v$  ovat differentioituvia (jopa kaikkialla jatkuvat osittaisderivaatat) ja  $u_x(x, y) = 2x = v_y(x, y)$  sekä  $u_y(x, y) = -2y = -v_x(x, y)$ , joten Cauchyn ja Riemannin yhtälöt toteutuvat.

b) Tutkitaan, onko funktio

$$g(z) = g(x + iy) = (x^2 + 2xy) + i(y^2 + 2xy)$$

analyyttinen. Nyt siis  $u(x, y) = x^2 + 2xy$  ja  $v(x, y) = y^2 + 2xy$ , joten esimerkiksi  $u_y(x, y) = 2x$  ja  $v_x(x, y) = 2y$ . Näemme, että yhtälö  $u_y(x, y) = -v_x(x, y)$  toteutuu vain suoralla  $x = -y$ . Erityisesti se ei toteudu missään avoimessa joukossa (eli minkään pisteen kokonaisessa ympäristössä), joten  $g$  ei voi olla analyyttinen missään pisteessä.

Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden seurauksena saadaan mm. seuraava hyödyllinen tulos. Lukijan on tässä vaiheessa syytä kerrata yhtenäisyyden ja alueen käsitteet luvun 2 lopusta !

**3.19 Lause.** *Olkkoon  $f$  on analyyttinen alueessa  $A$ . Oletetaan, että jokin seuraavista funktioista on vakio  $A$ :ssa:  $\operatorname{Re} f$ ,  $\operatorname{Im} f$ ,  $|f|$  tai  $\arg f$ . Tällöin  $f$  on vakio  $A$ :ssa.*

Lauseen todistamiseen tarvitsemme seuraavan aputuloksen, joka kuuluu useamman muuttujan funktioiden differentiaali- ja integraalilaskennan piiriin (vektorianalyysin kurssi) ja jonka todistaminen (tai kirjallisuudesta etsiminen) jää harjoitustehtäväksi.

**3.20 Apulause.** *Oletetaan, että  $A \subset \mathbb{R}^2$  on alue ja  $U: A \rightarrow \mathbb{R}$  on funktio, jolle  $U_x = U_y = 0$   $A$ :ssa. Tällöin  $U$  on vakio.*

*Lauseen 3.19 todistus.* Merkitään  $f = u + iv$ . Jos oletetaan, että  $u = \operatorname{Re} f$  on vakio, niin selvästi  $u_x = u_y = 0$ . Mutta nyt Cauchyn ja Riemannin yhtälöistä seuraa, että myös  $v_x = v_y = 0$ , joten apulauseen mukaan  $v$  ja siten myös  $f$  on vakio. Jos oletetaan, että  $v = \operatorname{Im} f$  on vakio, päättely on samanlainen. Modulin ja argumentin osalta lauseen todistus sujuu mukavammin myöhemmin logaritmfunktion avulla.  $\square$

## Harmoniset funktiot

Cauchyn ja Riemannin yhtälöihin liittyen sanomme lyhyesti ja lisätietona muutaman sanan harmonisista funktioista. Tason avoimessa joukossa  $A$  määritelty reaaliarvoinen funktio  $u$  on *harmoninen*, mikäli sillä on jatkuvat toisen kertaluvun osittaisderivaatat, ts.  $u \in C^2(A)$ , ja se toteuttaa  $A$ :ssa *Laplacen yhtälön*

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Tässä siis  $u_{xx} = (u_x)_x$  on toinen osittaisderivaatta ensimmäisen muuttujan suhteen, ja muut toisen kertaluvun osittaisderivaatat merkitään vastaavasti.



Olkoon nyt  $f = u + iv$  analyyttinen  $A$ :ssa. Oletetaan lisäksi, että  $u$  ja  $v$  kuuluvat funktioluokkaan  $C^2(A)$ ; kuten huomautuksessa 3.17b totesimme, tämä on itse asiassa aina totta analyyttisen funktion reaali- ja imaginaariosalle. Cauchyn ja Riemannin yhtälöistä sekä vektorianalyysin kurssilla todistetusta osittaisderivoitijärjestyksen vaihtosäännöstä seuraa, että

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = (v_y)_x - (v_x)_y = 0,$$

joten  $u$  on harmoninen. Samoin nähdään, että  $v$  on harmoninen. *Analyyttisen funktion reaali- ja imaginaariosa ovat siis aina harmonisia funktioita!*

Kääntäen voidaan osoittaa, että jos  $u$  on konveksissa (tai yleisemmin ns. *yhdesti yhtenäisessä* eli ”reiättömässä”) alueessa  $A$  määritelty harmoninen funktio, niin on olemassa toinen harmoninen funktio  $v$  (ns. *liittofunktio*)  $A$ :ssa siten, että  $u + iv$  on analyyttinen. Sivuumme näiden asioiden laajemman ja tarkemman käsittelyn – harmonisia funktioita on yleensä opiskeltu paremmin kurssilla Kompleksianalyysi II.

**3.21 Esimerkki.** a) Jokainen ensimmäisen asteen polynomi  $u(x, y) = ax + by + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{R}$ ) on harmoninen, sillä selvästi  $\Delta u = 0$ . Liittofunktiolle  $v$  tulee olla Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden mukaan voimassa  $v_x = -u_y = -b$  ja  $v_y = u_x = a$ . Eräs tällainen funktio on  $v(x, y) = -bx + ay$ . Mitä onkaan  $u + iv$  muuttujan  $z$  avulla kirjoitettuna tällöin?

b) Tarkastellaan funktioita  $u(x, y) = ax^2 + by^2$ , jossa  $a, b \in \mathbb{R}$ , ja selvitetään, koska nämä ovat harmonisia. Derivoimalla saadaan  $\Delta u = 2a + 2b$ , joten  $u$  on harmoninen jos ja vain jos  $a = -b$  ja tällöin  $u(x, y) = a(x^2 - y^2) = \operatorname{Re} az^2$ .

### Käänteisfunktion analyyttisyys; juurifunktio

Tarkastellaan seuraavaksi funktiota  $z \mapsto z^2$ , joka on analyyttinen koko  $\mathbb{C}$ :ssä. Sen kuvausominaisuuksia on mukava ajatella napaesityksen kautta, sillä jos  $z = se^{i\theta}$ , niin  $z^2 = s^2 e^{2i\theta}$ .

Tutkitaan tämän funktion kääntämistä eli mahdollisuuksia määrittellä neliöjuurifunktio kompleksiluvuilla. Kuten luvun 1 lopussa on nähty, jokaisella  $w \neq 0$  on olemassa kaksi eri lukua  $z$ , joille  $z^2 = w$ : jos esimerkiksi kirjoitetaan  $w = re^{i\varphi}$ , jossa  $r > 0$  ja  $\varphi \in (-\pi, \pi]$  (jolloin  $r$  ja  $\varphi$  ovat yksikäsitteiset), niin luvuille  $z = \pm\sqrt{r} e^{i\varphi/2}$  kummallekin pätee  $z^2 = w$ ; +-merkkiä vastaava sijaitsee oikeassa puolitasossa (tai positiivisella imaginaariakselilla) ja -merkkiä vastaava origon suhteen symmetrisesti vasemmassa puolitasossa (tai negatiivisella imaginaariakselilla). (Tässä  $\sqrt{r}$  viittaa tietysti ei-negatiivisen reaalityksen  $r$  tuttuun ei-negatiiviseen neliöjuureen.)

Pohdittaessa juurifunktion määrittelyä – tai yleisemmin analyyttisen ei-injektiivisen funktion kääntämistä – ajaututaan siis luonnostaan tekemisiin monikäsitteisten (eli moniarvoisten) funktioiden kanssa. Tällaisten kunnollinen analyyttinen käsittely vaatisi ns. *Riemannin pintojen* teoriaa, johon emme tällä kurssilla ryhdy. Yllä voimme tietysti aina valita esimerkiksi juuren  $\sqrt{r} e^{i\varphi/2}$ , jolloin päädyimme funktioon

$$(3.22) \quad g : re^{i\varphi} \mapsto \sqrt{r} e^{i\varphi/2} \quad (r \geq 0, -\pi < \varphi \leq \pi).$$

Tämä määrittelee koko  $\mathbb{C}$ :ssä yksikäsitteisen funktion, joka on oikeanpuoleinen käänteisfunktio funktiolle  $z \mapsto z^2$ , ts.  $g(w)^2 = w$  kaikilla  $w \in \mathbb{C}$ . Ongelmana kuitenkin on, että  $g$  ei ole jatkuva (saati analyyttinen) negatiivisen reaaliakselin  $(-\infty, 0)$  pisteissä. (Miksi?) Analyyttisen käänteisfunktion saavuttamiseksi onkin pakko rajoittaa sen määrittelyjoukkoa.

Voimme ottaa käyttöön seuraavan yleisen käsitteen:

**3.23 Määritelmä.** Olkoon  $f$  avoimessa joukossa  $A$  määritelty analyyttinen funktio, ja olkoon  $D$  kuvajoukkoon  $f(A)$  sisältyvä alue. Sanotaan, että  $g: D \rightarrow A$  on  $f$ :n käänteiskuvauksen *haara alueessa*  $D$ , mikäli  $g$  on jatkuva  $D$ :ssä ja  $f(g(w)) = w$  kaikilla  $w \in D$ .

Huomaa, että tällainen haara on aina injektio, koska jos  $g(w) = g(w')$ , niin  $w = f(g(w)) = f(g(w')) = w'$ . Yleensä ei ole olemassa koko kuvajoukossa  $f(A)$  määriteltyä haaraa, ei edes silloin kun  $f(A)$  on alue. Toisaalta jos käänteiskuvauksella on haara jossakin alueessa  $D$ , sillä on tavallisesti niitä siellä useita, ja lisäksi alue  $D$  voidaan valita monella tavalla.

Osoittautuu, että pelkkä haaran määritelmässä vaadittu jatkuvuus takaa sen analyyttisyyden niissä pisteissä, joissa analyyttinen kääntäminen ylipäättään voi olla mahdollista. Tämän kertoo käänteisfunktion derivointilause:

**3.24 Lause.** *Olkoon  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  analyyttinen ja olkoon  $g$  sen käänteiskuvauksen haara alueessa  $D$ . Jos  $w_0 \in D$  ja pisteessä  $z_0 = g(w_0)$  pätee  $f'(z_0) \neq 0$ , niin  $g$ :llä on pisteessä  $w_0$  derivaatta*

$$g'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)}.$$

*Siten jos  $f'(z) \neq 0$  kaikilla  $z \in g(D)$ , niin  $g$  on analyyttinen  $D$ :ssä.*

*Todistus.* Jos  $w \in D$  ja  $w \neq w_0$ , niin

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{g(w) - g(w_0)}{f(g(w)) - f(g(w_0))} = \left( \frac{f(g(w)) - f(g(w_0))}{g(w) - g(w_0)} \right)^{-1}.$$

Kun  $w \rightarrow w_0$ , niin jatkuvuuden nojalla  $g(w) \rightarrow g(w_0)$ , joten derivaatan määritelmästä nähdään, että yo. lauseke lähestyy lukua  $f'(g(w_0))^{-1} = f'(z_0)^{-1}$ .  $\square$

Palataan neliöjuurifunktion määrittelyyn. Rajoitamme kaavassa (3.22) määritellyn funktion negatiivista reaaliakselia pitkin aukileikattuun tasoon  $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , ts. tarkastelemme funktiota

$$(3.25) \quad g: D \rightarrow \mathbb{C}, \quad re^{i\varphi} \mapsto \sqrt{r}e^{i\varphi/2} \quad (r > 0, -\pi < \varphi < \pi).$$

Tässä  $D$  on selvästi alue ja  $g$  kuvaa sen bijektiivisesti oikealle puolitasolle  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0\}$ .

**3.26 Lause.** *Kaavan (3.25) funktio on neliöjuuren haara,  $g(w) = \sqrt{w}$ , joka on analyyttinen  $D$ :ssä, ja  $g'(w) = 1/2g(w)$  kaikilla  $w \in D$ . Toisin sanoen*

$$\frac{d}{dw} \sqrt{w} = \frac{1}{2\sqrt{w}}, \quad w \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0].$$

Saatua neliöjuuren haaraa kutsutaan usein *neliöjuuren päähaaraksi*.

*Todistus.* Koska  $\frac{d}{dz}z^2 = 2z \neq 0$  kaikilla oikean puolitason pisteillä  $z$ , väite seuraa käänteisfunktion derivointilauseesta, kun osoitamme, että  $g$  on jatkuva  $D$ :ssä.

Olkoot tätä varten  $w_0$  ja  $w$  alueen  $D$  pisteitä sekä  $z_0 = g(w_0)$  ja  $z = g(w)$  vastaavat oikean puolitason pisteet. Tällöin pätee

$$|w - w_0| = |z^2 - z_0^2| = |z - z_0| |z + z_0| \geq |z - z_0| \operatorname{Re} z_0,$$

sillä  $\operatorname{Re} z_0 \leq \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z_0 = \operatorname{Re}(z + z_0) \leq |z + z_0|$ . Jos siis  $\epsilon > 0$ , niin voimme päätellä, että

$$|g(w) - g(w_0)| \leq \frac{|w - w_0|}{\operatorname{Re} g(w_0)} < \epsilon,$$

kunhan vain  $|w - w_0| < \epsilon \operatorname{Re} g(w_0)$ . Siten  $g$  on jatkuva  $w_0$ :ssa.  $\square$

**3.27 Huomautus.** Lause 2.19 antaa vaihtoehtoisen todistuksen neliöjuuren päähaaran jatkuvuuden osoittamiseksi (vrt alla).

Aivan vastaavalla tavalla saamme analyttisen haaran  $n$ :nnelle juurelle alueessa  $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  kaavasta

$$(3.28) \quad re^{i\varphi} \mapsto r^{1/n} e^{i\varphi/n} \quad (r > 0, -\pi < \varphi < \pi).$$

Se on bijektio leikatulta kompleksitasolta  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  sektorille  $\{z \in \mathbb{C} : -\pi/n < \arg z < \pi/n\}$ . Yleisen  $n$ :nnen juuren  $z^{1/n}$  päähaaran (3.28) jatkuvuus saadaan esimerkiksi seuraavasti:

Kun  $z = re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , pisteen  $z$  argumentti  $\varphi = \varphi(z) = \arg(z)$  on lauseen 2.19 mukaan jatkuva alueessa  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ . Sen vuoksi myös

$$z \mapsto e^{i\varphi(z)/n} = \cos(\varphi(z)/n) + i \sin(\varphi(z)/n)$$

on jatkuva  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ :ssä; toisaalta  $r = r(z) = |z|$  on jatkuva koko tasossa.

## 4 Potenssisarjat

Cauchyn ja Riemannin yhtälöt eivät ole ainoa menetelmä analyyttisten funktioiden ymmärtämiseen. Itse asiassa näitä funktioita voi lähestyä monista eri näkökulmista, esimerkiksi tässä osaluvussa tarkasteltavien potenssisarjojen avulla. Tulemme myöhemmin osoittamaan, että jokainen analyyttinen funktio voidaan esittää ainakin lokaalisti suppenevan potenssisarjan summana, ts. muodossa  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ .

Selvitämme lyhyesti tarvittavia kompleksitermisten sarjojen ominaisuuksia. Ne ovat pääpiirteissään samanlaisia kuin reaalisten sarjojen teoriassa.

### Sarjan suppeneminen

Olkoot  $z_0, z_1, z_2, \dots$  kompleksilukuja, ja tarkastellaan sarjaa

$$(4.1) \quad \sum_{k=0}^{\infty} z_k = z_0 + z_1 + z_2 + \dots$$

Kirjoitamme joskus lyhyemmin  $\sum_k z_k$ . Tämän *osasummat* ovat

$$S_n = \sum_{k=0}^n z_k, \quad n \geq 0,$$

ja sarja (4.1) *suppenee*, mikäli on olemassa raja-arvo  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \in \mathbb{C}$ . Luku  $S$  on sarjan *summa*, ja merkitään  $\sum_{k=0}^{\infty} z_k = S$ . Jollei (4.1) suppene, se *hajaantuu*. Jos kirjoitetaan  $z_k = x_k + iy_k$ , niin nähdään, että  $\sum_k z_k$  suppenee jos ja vain jos sekä  $\sum_k x_k$  että  $\sum_k y_k$  suppenevat.

Sarja (4.1) on *itseisesti suppeneva*, jos  $\sum_k |z_k|$  suppenee. Koska jälkimmäisen sarjan osasummat muodostavat kasvavan jonon, voidaan tässä tapauksessa merkitä myös  $\sum_k |z_k| < \infty$ . Yhtäpitävää on, että  $\sum_k |x_k| < \infty$  ja  $\sum_k |y_k| < \infty$ . Tästä voidaan päätellä helposti, että itseisesti suppeneva sarja on aina suppeneva tavallisessa mielessä.

### Potenssisarjat ja suppenemissäde

Kompleksinen *potenssisarja* on muotoa

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

jossa  $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}$  (sarjan *kertoimet*),  $z_0 \in \mathbb{C}$  (sarjan *keskus*) ja  $z \in \mathbb{C}$  (muuttuja). Sovimme tässä yhteydessä aina, että  $0^0 = 1$ . Kiinnostavaa on erityisesti se, millä muuttujan  $z$  arvoilla ko. potenssisarja suppenee. Useimmissa tarkasteluissa voimme

olettaa, että  $z_0 = 0$ ; yleinen potenssisarja palautuu tähän origokeskiseen muotoon sijoituksella  $w = z - z_0$ .

**4.2 Esimerkki.** Geometrinen sarja  $\sum_{k=0}^{\infty} z^k$  suppenee itseisesti, kun  $|z| < 1$ , sillä tällöin

$$\sum_{k=0}^{\infty} |z^k| = \sum_{k=0}^{\infty} |z|^k = \frac{1}{1 - |z|} < \infty.$$

Sarjan summa lasketaan aivan kuten reaalisisä tapauksessa, ja se on

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

Jos  $|z| \geq 1$ , niin sarja hajaantuu, sillä  $z^k \not\rightarrow 0$ , kun  $k \rightarrow \infty$ .

Potenssisarjojen teorian keskeinen lähtökohta on seuraava havainto:

**4.3 Apulause** (Abelin lause). Jos  $\sum_k a_k (z - z_0)^k$  suppenee pisteessä  $z = z_1 \neq z_0$ , se suppenee itseisesti jokaisella  $z$ , jolle  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ .

*Todistus.* Voidaan olettaa  $z_0 = 0$ . Koska  $\sum_k a_k z_1^k$  suppenee, muodostavat sen termit rajoitetun (jopa nollaan suppenevan) jonon: on olemassa  $M < \infty$  siten, että  $|a_k z_1^k| \leq M$  kaikilla  $k \geq 0$ . Niinpä jos  $|z| < |z_1|$ , saadaan

$$|a_k z^k| = \left| a_k z_1^k \left( \frac{z}{z_1} \right)^k \right| \leq M q^k, \quad \text{jossa } q = \frac{|z|}{|z_1|} < 1.$$

Siis sarjalla  $\sum_k |a_k z^k|$  on majoranttina suppeneva geometrinen sarja, joten se itsekin suppenee.  $\square$

**4.4 Määritelmä.** Potenssisarjan (\*)  $\sum_k a_k (z - z_0)^k$  suppenemissäde on

$$R = \sup\{|z - z_0| : (*) \text{ suppenee pisteessä } z\}.$$

Tämä on ei-negatiivinen reaaliluku tai  $\infty$  (eli  $+\infty$ ).

Abelin lause kertoo, että jos sarja (\*) suppenee pisteessä  $z_1$ , se suppenee kaikilla  $z$ , joille  $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$ . Toisaalta siitä seuraa (epäsuorasti päättelemällä), että jos (\*) hajaantuu pisteessä  $z_1$ , niin se hajaantuu kaikilla  $z$ , joille  $|z - z_0| > |z_1 - z_0|$ . Näistä havainnoista seuraa helposti seuraava tulos (mieti todistus harjoitustehtävänä):

**4.5 Lause.** Sarjan (\*)  $\sum_k a_k (z - z_0)^k$  suppenemiselle on kolme vaihtoehtoa:

- $R = 0$ : (\*) suppenee vain pisteessä  $z = z_0$ .
- $0 < R < \infty$ : (\*) suppenee (itseisesti), kun  $|z - z_0| < R$ , ja hajaantuu, kun  $|z - z_0| > R$ .
- $R = \infty$ : (\*) suppenee (itseisesti) kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ .

Jos  $0 < R < \infty$ , kiekkoa  $D(z_0, R)$  kutsutaan potenssisarjan (\*) suppenemiskiekoksi. (Tapauksissa  $R = 0$  ja  $R = \infty$  olisi johdonmukaisinta sopia, että suppenemiskiekko on vastaavasti  $\emptyset$  tai  $\mathbb{C}$ .) Ympyrällä  $|z - z_0| = R$  voi olla sekä pisteitä, joissa sarja suppenee, että pisteitä, joissa se hajaantuu, ja asian selvittäminen voi olla hankalaa eikä edes yleensä tarpeen.

Miten suppenemissäde voidaan laskea kertoimien  $a_k$  avulla? Tässä voi käyttää suppenemistestejä, jotka ovat analyysin peruskursseilta tuttuja reaalille sarjoille:

- *Suhdetesti*: Jos on olemassa raja-arvo  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|/|a_{k+1}| = R$ , niin kyseessä on sarjan (\*) suppenemissäde.
- *Juuritesti*: Jos on olemassa raja-arvo  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = S$ , niin sarjan (\*) suppenemissäde on  $R = 1/S$ . (Jos  $S = 0$ , niin  $R = \infty$ , ja jos  $S = \infty$ , niin  $R = 0$ .)

Näiden todistukset ovat samanlaiset kuin reaalissa tapauksessa; jälkimmäisen todistamme kohta yleisemmässä muodossa.

### Hadamardin lause

Kumpaakaan suhde- ja juuritestin raja-arvoista ei ole välttämättä olemassa. Esitämekin yleisen kaavan, joka perustuu reaalisen lukujonon *yläraja-arvon* (limes superior) käsitteeseen. Kun  $(x_k)$  on reaalilukujoono, määritellään

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\} = \inf_{n \geq 1} \sup\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \dots\}.$$

Huomaa, että yläraja-arvo on hyvinmääritelty (mahdollisesti  $\pm\infty$ ) jokaiselle reaalilukujonolle. Jos  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k$  on olemassa, on aina  $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ .

Jonon  $(x_k)$  yläraja-arvo voidaan luonnehtia monella tavalla. Se on suurin jonon  $(x_k)$  reaalista *kasautumisarvoista* tai  $\pm\infty$ . Luku  $x \in \mathbb{R}$  on jonon  $(x_k)$  kasautumisarvo, mikäli jokainen  $x$ :n ympäristö  $(x - \epsilon, x + \epsilon)$  sisältää jäsenen  $x_k$  äärettömän monella indeksin  $k$  arvolla tai yhtäpitävästi jokin  $(x_k)$ :n osajono suppenee kohti  $x$ :ää.  $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = +\infty$  merkitsee, että jonossa  $(x_k)$  on mielivaltaisen suuria jäseniä, ja  $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = -\infty$  puolestaan merkitsee, että  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = -\infty$ .

Harjoitustehtävässä todetaan seuraava: Kun  $S \in \mathbb{R}$ , niin  $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = S$  jos ja vain jos seuraavat ehdot pätevät:

- Aina kun  $S' > S$ , niin  $x_k < S'$  kaikilla kyllin suurilla  $k$ .
- Aina kun  $S' < S$ , niin  $x_k > S'$  äärettömän monella  $k$ .

**4.6 Esimerkki.** Olkoon  $x_k = (-1)^k$ , kun  $k \geq 1$ . Jono  $(x_k) = (-1, 1, -1, 1, \dots)$  ei suppene, mutta  $\limsup_{k \rightarrow \infty} x_k = 1$ .

**4.7 Lause** (Hadamardin lause). *Potenssisarjan  $\sum_k a_k(z - z_0)^k$  suppenemissäde  $R$  saadaan aina kaavasta*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}.$$

*Todistus.* Oletetaan, että  $z_0 = 0$ , ja merkitään  $S = \limsup_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k}$ .

Oletetaan, että pisteelle  $z \in \mathbb{C}$  pätee  $|z| < 1/S$ . Tällöin on olemassa  $S'$  siten, että  $S < S' < 1/|z|$ . Näin ollen yo. i-ehdon nojalla  $|a_k|^{1/k} < S'$  kaikilla  $k \geq n_0$ , jossa  $n_0$  on kyllin suuri. Tällöin voimme arvioida

$$|a_k z^k| \leq (S')^k |z^k| = (S'|z|)^k$$

kaikilla  $k \geq n_0$ . Koska  $S'|z| < 1$ , sarjalla  $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k z^k|$  on siis suppeneva geometrinen sarja majoranttina, joten se itsekin suppenee. Siten suppenemissäteelle pätee  $R \geq |z|$ . Koska  $|z|$  voidaan valita mielivaltaisen läheltä lukua  $1/S$ , päättelemme, että  $R \geq 1/S$  eli  $1/R \leq S$ .

Oletetaan sitten, että pisteelle  $z \in \mathbb{C}$  pätee  $|z| < R$ . Tällöin sarja  $\sum_k a_k z^k$  suppenee, joten erityisesti  $|a_k z^k| \leq 1$  suurilla  $k$ . Tästä seuraa, että  $|a_k|^{1/k} \leq 1/|z|$  suurilla  $k$ , joten myös  $S \leq 1/|z|$ . Koska  $|z|$  voidaan valita mielivaltaisen läheltä lukua  $R$ , tästä seuraa, että  $S \leq 1/R$ .  $\square$

**4.8 Esimerkki.** a) Tarkastellaan potenssisarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots$$

Nyt siis  $a_k = 1/k$ , kun  $k \geq 1$ , ja  $a_0 = 0$ . Suppenemissäde voidaan laskea helposti suhdetestillä:  $\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|/|a_{k+1}| = \lim_{k \rightarrow \infty} (k+1)/k = 1$ . Samaan tulokseen päädytään tietysti myös juuritestillä, sillä  $1/\lim_{k \rightarrow \infty} |a_k|^{1/k} = \lim_{k \rightarrow \infty} k^{1/k} = 1$ . Suppenemiskiekkko on siis yksikkökiekkko  $D(0, 1)$ . Jos  $z = 1$ , kyseessä on harmoninen sarja, joka hajaantuu; jos taas  $z = -1$ , kyseessä on vuorotteleva sarja, joka suppenee Leibnizin lauseen nojalla. (Entä muut yksikköympyrän pisteet  $z$ ?)

b) Tarkastellaan sitten sarjaa

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{k^2}}{k^2} = z + \frac{z^4}{4} + \frac{z^9}{9} + \frac{z^{16}}{16} + \dots$$

Tämä on ymmärrettävä potenssisarjana  $\sum_j a_j z^j$ , jossa  $a_j = 1/j$ , kun  $j = k^2$  jollekin kokonaisluvulle  $k \geq 1$ , ja muuten  $a_j = 0$ . Suhde- ja juuritestin raja-arvot eivät nyt ole olemassa. Voidaan kuitenkin laskea

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} |a_j|^{1/j} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{(k^2)^{1/k^2}} = 1,$$

joten Hadamardin lauseen mukaan suppenemissäde on  $1/1 = 1$ . (Huomaa, että jono  $(a_j)$  jakautuu kahteen suppenevaan osajonoon: toinen on  $(1/k^2)$  ja toinen nollista koostuva vakiojono.)

### Potenssisarjan summan analyttisyys

Seuraava lause on tärkeä. Se kertoo, että suppeneva potenssisarja määrittelee suppenemiskiekkossaan analyttisen funktion.

**4.9 Lause.** Oletetaan, että sarjan  $\sum_k a_k(z - z_0)^k$  suppenemissäde on  $R > 0$ , ja olkoon sarjan summa

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0, R).$$

Tällöin  $f$  on analyyttinen kiekossa  $D(z_0, R)$  ja  $f'$  voidaan laskea termeittäin derivoimalla:

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k(z - z_0)^{k-1}, \quad z \in D(z_0, R).$$

Tämän derivoimalla saadun sarjan suppenemissäde on myös  $R$ .

*Todistus.* Voidaan olettaa, että  $z_0 = 0$ . Olkoon  $R'$  sarjan  $\sum_k k a_k z^{k-1}$  suppenemissäde. Osoitetaan aluksi, että  $R' = R$ . Oletetaan, että  $|z| < R$ . Tällöin voidaan valita  $z_1$  siten, että  $|z| < |z_1| < R$ . Kun  $k \geq 1$ , kirjoitetaan

$$|k a_k z^{k-1}| = |a_k z_1^k| \cdot \left[ \frac{k}{|z|} \left( \frac{|z|}{|z_1|} \right)^k \right].$$

Koska  $|z|/|z_1| < 1$ , hakasulkeissa oleva lauseke lähestyy nollaa, kun  $k \rightarrow \infty$ . Siten kyseinen jono on rajoitettu. Koska sarja  $\sum_k a_k z_1^k$  suppenee itseisesti, majoranttiperiaatteen avulla näemme nyt, että myös sarja  $\sum_k k a_k z^{k-1}$  suppenee itseisesti. Siispä  $R' \geq |z|$ . Näin ollen  $R' \geq R$ . Kääntäen pätee kaikilla  $z$  ja  $k \geq 1$  arvio

$$|a_k z^k| = |z| \cdot |a_k z^{k-1}| \leq |z| \cdot |k a_k z^{k-1}|.$$

Tästä voimme päätellä, että aina kun  $\sum_k k a_k z^{k-1}$  suppenee itseisesti, niin tekee myös  $\sum_k a_k z^k$ . Näin ollen  $R \geq R'$ .

Merkitään

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad g_n(z) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k z^k,$$

ja

$$d(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}, \quad d_n(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}.$$

Kiinnitetään  $z \in D(0, R)$ . Koska  $f = f_n + g_n$ , voimme kirjoittaa, kun  $w \neq z$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - d(z) \\ &= \left[ \frac{f_n(w) - f_n(z)}{w - z} - d_n(z) \right] - [d(z) - d_n(z)] + \left[ \frac{g_n(w) - g_n(z)}{w - z} \right] \\ &= A_n(w) - B_n + C_n(w). \end{aligned}$$

Väite seuraa (pisteelle  $z$ ), kunhan osoitamme, että tämä lauseke lähestyy nollaa, kun  $w \rightarrow z$ .

Olkoon  $\epsilon > 0$ . Merkitään  $\delta_0 = (R - |z|)/2 > 0$  ja  $r = |z| + \delta_0 < R$ . Oletamme jatkossa koko ajan, että  $w \in D(z, \delta_0)$ . Tällöin kolmioepäyhtälöstä seuraa (tai piirrä



kuval), että  $|w| < r$ . Selvästi myös  $|z| < r$ . Koska  $d_n(z) \rightarrow d(z)$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , voimme valita luvun  $n_1 \geq 1$  siten, että  $|B_n| < \epsilon/3$ , kun  $n \geq n_1$ . Tutkitaan lauseketta  $C_n$ :

$$C_n(w) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{w^k - z^k}{w - z}.$$

Käytämme tässä seuraavaa identiteettiä, jonka todistus on harjoitustehtävä:

$$w^k - z^k = (w - z) \sum_{j=0}^{k-1} w^j z^{k-1-j}.$$

Siispä voimme arvioida

$$\left| \frac{w^k - z^k}{w - z} \right| \leq \sum_{j=0}^{k-1} |w|^j |z|^{k-1-j} \leq k r^{k-1}$$

ja edelleen

$$|C_n(w)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} k |a_k| r^{k-1}.$$

Koska kyseessä on suppenevan sarjan jäännöstermi (huomaa, että  $r < R$ ), on olemassa luku  $n_2 \geq 1$  siten, että  $|C_n(w)| < \epsilon/3$ , kun  $n \geq n_2$ . Huomaa, että tämä arvio pätee tasaisesti kaikille  $w \in D(z, \delta)$ .

Olkoon  $n = \max\{n_1, n_2\}$ . Nyt siis sekä  $|B_n| < \epsilon/3$  että  $|C_n(w)| < \epsilon/3$ . Koska  $f'_n(z) = d_n(z)$  summan derivointisäännön perusteella, pätee  $A_n(w) \rightarrow 0$ , kun  $w \rightarrow z$ . On siis olemassa  $\delta \in (0, \delta_0)$  siten, että  $A_n(w) < \epsilon/3$  kaikilla  $w \in D(z, \delta)$ . Yhdistämällä nämä arviot ja käyttämällä kolmioepäyhtälöä näemme lopulta, että

$$\left| \frac{f(w) - f(z)}{w - z} - d(z) \right| \leq |A_n(w)| + |B_n| + |C_n(w)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon,$$

kun  $w \in D(z, \delta)$ . Olemme todistaneet, että  $f'(z) = d(z)$ .  $\square$

Myöhemmin Cauchyn integraalikaavan seurauksena tulemme todistamaan lauseelle 4.9 käänteisen tuloksen: analyyttinen funktio on aina esitettävissä (ainakin lokaalisti) suppenevan potenssisarjan summana.

Soveltamalla edellistä lausetta induktiivisesti saamme seuraavan tuloksen:

**4.10 Seuraus.** *Olkoon funktio  $f$  kuten edellisessä lauseessa:*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0, R),$$

jossa suppenemissäde  $R > 0$  (mahdollisesti  $R = \infty$ ). Tällöin  $f$ :llä on kiekossa  $D(z_0, R)$  kaikkien kertalukujen derivaatat, jotka voidaan laskea termeittäin derivoimalla:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{k-n}.$$

Erityisesti  $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$ .

Tarkastellaan vielä seuraavaa esimerkkiä potenssisarjojen käytöstä.

**4.11 Esimerkki.** Lauseen 3.4 nojalla funktio  $g(z) = \frac{1}{z+1}$  on analyyttinen joukossa  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$ . Tehtävänä on kehittää funktio sarjana  $(z-i)$ :n potenssien suhteen, ja määrätä saadun sarjan suppenemisalue.

*Ratkaisu.* Haetaan etsitty sarja palauttamalla se geometrisen sarjan tarkasteluihin:

$$\frac{1}{z+1} = \frac{1}{z-i+(1+i)} = \frac{1}{1+i} \left( \frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}} \right),$$

ja mikäli  $|z-i|/|1+i| < 1$  eli  $|z-i| < \sqrt{2}$ , lauseke voidaan kehittää geometrisena sarjana,

$$g(z) = \left( \frac{1}{1+i} \right) \left( \frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}} \right) = \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left( \frac{z-i}{1+i} \right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(1+i)^{n+1}} (z-i)^n$$

joka on etsittyä muotoa  $\sum a_n(z-i)^n$  oleva sarja. Lisäksi yo. argumentista saadaan sarjan suppenemissäde  $R = \sqrt{2}$ . Huomaa myös että suppenemisalue  $\{z : |z-i| < \sqrt{2}\}$  on suurin  $i$ -keskinen kiekko, joka sisältyy  $g$ :n analyyttisyysalueeseen  $\mathbb{C} \setminus \{-1\}$  !

Toisaalta, ylläolevan esimerkin funktiolla  $g(z) = \frac{1}{1+z}$  on geometrisen sarjan summana potenssisarjakehitelmä tietysti myös origon ympäristössä,

$$g(z) = \frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n, \quad |z| < 1.$$

Toisin sanoen, huomataan että vaihtamalla sarjan keskusta  $z_0$  voi saman (analyyttisen) funktion esittää eri potenssisarjoilla  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ .

## 5 Eksponentti- ja logaritmfunktio

Tässä luvussa määrittelemme eksponenttifunktion  $e^z$  kompleksitasossa ja tutkimme sen kääntämistä eli logaritmin määrittelyä. Näiden avulla voimme myös tarkastella yleistä potenssifunktiota  $z^a$ , jossa  $a$  on mikä tahansa kompleksiluku.

### Eksponenttifunktio

Analyysin peruskursseilla on määritelty eksponenttifunktio reaaliakselilla, ja tämän kurssin alussa olemme määritelleet sen myös imaginaariakselilla, Eulerin kaavan avulla. Haluamme seuraavaksi laajentaa eksponenttifunktion koko kompleksitasoon. Miten tämä olisi paras tehdä ?

Meillä on jo käytössä kaksi perusmenetelmää analyttisten funktioiden ymmärtämiseksi, Cauchyn ja Riemannin yhtälöt sekä potenssisarjat. Näytämme seuraavaksi, että kumpikin menetelmä antaa oman luonnollisen tapansa määrittellä eksponenttifunktion  $e^z$  ja että saadut funktiot ovat samat, hyvin erilaisista lähestymistavoista huolimatta!

Ensimmäisessä lähestymistavassa toiveena olisi, että saatava funktio  $e^z$  olisi paitsi analyyttinen myös toteuttaisi eksponenttifunktion perusominaisuuden

$$(5.1) \quad e^{z+w} = e^z e^w, \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Jotta ominaisuus (5.1) toteutuisi ja aikaisemmat määritelmät reaali- ja imaginaariakselilla pysyisivät voimassa, meidän on asetettava

$$(5.2) \quad e^z = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C}.$$

Tarvittaessa voi myös kirjoittaa  $e^z = \exp z$ . Huomaa, että määritelmän mukaan  $|e^z| = e^x$  ja  $\arg e^z = y$ . Tarkastamalla tapaukset  $y = 0$  ja  $x = 0$  näemme myös, että aikaisemmat määritelmät reaali- ja imaginääriakseleilla todella pysyvät voimassa. Lisäksi jos  $z = x + iy$  ja  $w = u + iv$ , niin

$$e^{z+w} = e^{x+u} e^{i(y+v)} = e^x e^u e^{iy} e^{iv} = e^{x+iy} e^{u+iv} = e^z e^w,$$

joten määrittelemällämme funktiolla on haluttu ominaisuus (5.1).

Jäljelle jää vain analyttisyyden osoittaminen. Se saadaan Cauchyn ja Riemannin yhtälöiden avulla:

**5.3 Lause.** *Kaavan (5.2) määrittelemä funktio on analyyttinen  $\mathbb{C}$ :ssä ja  $\frac{d}{dz} e^z = e^z$ .*

*Todistus.* Määritelmästä näemme, että funktion reaaliosa on  $u(x, y) = e^x \cos y$  ja imaginaariosa  $v(x, y) = e^x \sin y$ . Näiden osittaisderivaatoille pätee

$$u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y),$$

joten Cauchyn ja Riemannin yhtälöt toteutuvat. Lisäksi osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Lauseen 3.15 perusteella  $e^z$  on siis analyyttinen ja sen derivaatta pisteessä  $z = x + iy$  on  $u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$ .  $\square$

Lause 5.3 antaa eksponenttifunktion olennaisen ominaisuuden, ja siksi kaavan (5.2) funktio on luonnollinen kompleksiarargumenttinen eksponenttifunktio. Mutta olisimmeko voineet toimia jollakin muullakin tavalla ?

Toinen mahdollisuus kompleksisen eksponenttifunktion määrittämiseen saadaan potenssisarjoista. Muistamme peruskursseilta, että  $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$  jokaisella  $x \in \mathbb{R}$ . Voisimme siksi rakentaa eksponenttifunktion korvaamalla sarjassa reaalinen muuttuja  $x$  kompleksiluku-muuttujalla  $z$ .

Mutta silloin tietysti keskeinen kysymys on, onko näin rakennettu eksponenttifunktio sama kuin minkä (5.2) antaa ? !

**5.4 Lause.** *Kaavan (5.2) määrittelemälle funktiolle  $e^z$  pätee*

$$(5.5) \quad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad z \in \mathbb{C},$$

*missä sarja suppenee itseisesti kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ .*

*Todistus.* Koska sarja (5.5) suppenee kaikilla  $x \in \mathbb{R}$ , Abelin lauseen tai Lauseen 4.5 mukaan yo. potenssisarja suppenee kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ ; Lauseen 4.9 nojalla siis kaava  $E(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  määrittelee (jonkin) koko tasossa analyyttisen funktion. Edelleen Lauseen 4.9 nojalla saamme tämän funktion derivaatalle

$$E'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n \frac{z^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = E(z).$$

Koska  $|e^z| = e^x > 0$  ja siis  $e^z \neq 0$  jokaisella  $z \in \mathbb{C}$ , Lauseen 3.4 mukaan

$$f(z) = \frac{E'(z)}{e^z}$$

on analyyttinen koko tasossa  $\mathbb{C}$  ja osamäärän derivaatta antaa

$$f'(z) = \frac{E'(z) e^z - (e^z)' E(z)}{(e^z)^2} = \frac{E(z) e^z - e^z E(z)}{(e^z)^2} = 0$$

Toisin sanoen  $f$  on jatkuvasti derivoituva ja  $f'(z) \equiv 0$ . Jos merkitään  $f = u + iv$ , osittaisderivaatat  $u_x = u_y = 0$  joten  $u$  on vakio (Lause 3.19). Samoin  $v_x = v_y = 0$  ja  $v$  vakio. Näin  $f(z)$  itsekin on vakio, ja koska  $f(x) = 1$  jokaisella  $x \in \mathbb{R}$  (Miksi?), on  $E(z) = e^z$ .  $\square$

Myöhempiä tarpeita varten formuloimme erikseen edellisen lauseen todistuksessa huomattun tuloksen.

**5.6 Apulause.** Jos  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  on analyyttinen alueessa  $A$ , silloin

$$f'(z) = 0 \text{ kaikilla } z \in A \Leftrightarrow f \text{ on vakio.}$$

**5.7 Huomautus.** a) Eulerin kaava (1.23) saa Lauseen 5.4 kautta luonnollisen selityksen: Olisimme yhtä hyvin voineet lähestyä kompleksista eksponenttifunktiota käyttäen sarjakehitelmää (5.5)! Silloin puhtaasti imaginäärisillä luvuilla  $z = iy$  saadaan

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} = \cos y + i \sin y,$$

missä ensimmäisessä yhtälössä käytimme potenssisarjaa (5.5) lähtökohtana ja toisessa hajotimme erikseen summat yli parillisten ja parittomien indeksien  $n$ , muistaen että  $i^{2n} = (-1)^n$ ; viimeisessä yhtälössä käytimme sinin ja cosinin tuttuja sarjakehitelmiä.

b) Myöhemmin tulemme osoittamaan seuraavan tuloksen: Jos  $f(z)$ ,  $g(z)$  ovat analyyttisiä koko kompleksitasossa ja  $f(x) = g(x)$  kun  $x \in \mathbb{R}$ , silloin  $f(z) = g(z)$  jokaisella  $z \in \mathbb{C}$ .

Toisin sanoen, Huomautuksen b)-osa sanoo että kun määritellään kompleksinen eksponenttifunktio analyyttisenä funktiona, kaikki tavat - kuten esim. (5.2) tai (5.5) - antavat välttämättä täsmälleen saman lopputuloksen!

Tätä teema voi jatkaa pitemmällekin:

**5.8 Määritelmä.** Määrittelemme kaikilla kompleksiluvuilla  $z \in \mathbb{C}$

$$\sin(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{ja}$$

$$\cos(z) = \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Tällöin sekä sin että cos ovat kokonaisia funktioita.

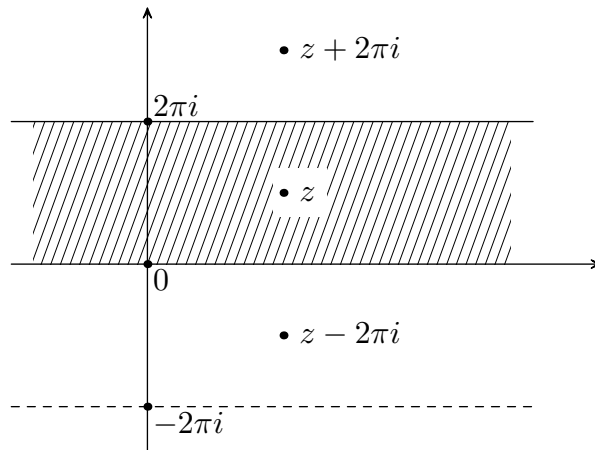
### Eksponttifunktion kuvausominaisuuksista

Reaalimuuttujan eksponenttifunktio  $x \mapsto e^x$  on tunnetusti bijektio reaaliakselilta positiiviselle reaaliakselille. Kompleksisen eksponenttifunktion tapauksessa törmäämme uuteen ilmiöön:  $e^z$  on jaksollinen ”imaginaariakselin suunnassa”. Tämä johtuu tietysti sinin ja kosinin jaksollisuudesta.

**5.9 Lause.** Eksponenttifunktiolla on jaksona  $2\pi i$ , ts.  $e^{z+n \cdot 2\pi i} = e^z$ , kun  $z \in \mathbb{C}$  ja  $n$  on kokonaisluku.

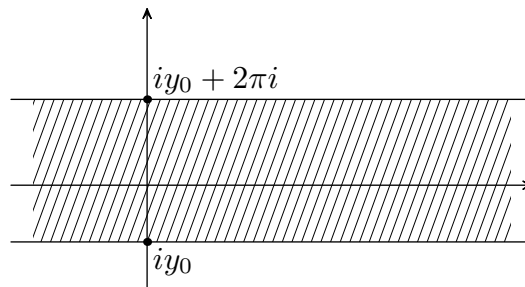
*Todistus.*  $e^{z+n \cdot 2\pi i} = e^z e^{n \cdot 2\pi i}$ , jossa  $e^{n \cdot 2\pi i} = \cos 2\pi n + i \sin 2\pi n = 1$ . □

Olipa  $z \in \mathbb{C}$  mikä tahansa, yksi luvuista  $z + n \cdot 2\pi i$  sijaitsee aina vaakasuorassa vyössä  $S_0 = \{z \in \mathbb{C} : 0 \leq \text{Im } z < 2\pi\}$  (kuva alla). Eksponenttifunktio saa siis kaikki arvonsa jo tässä joukossa.



Sama pätee mille tahansa ns. *jaksovoista*

$$S_{y_0} = \{z \in \mathbb{C} : y_0 \leq \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}, \quad y_0 \in \mathbb{R}.$$



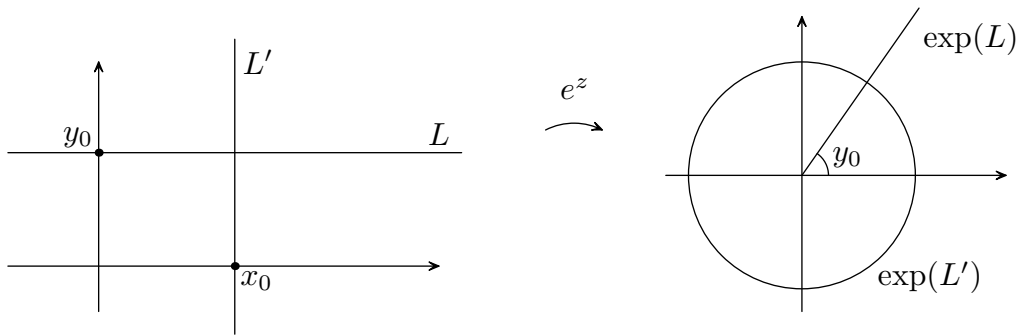
**5.10 Lause.** *Funktio  $z \mapsto e^z$  on bijektio jaksovyöltä  $S_{y_0}$  punkteeratulle tasolle  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .*

*Todistus.* Pannaan aluksi merkille, että kaikilla  $z \in \mathbb{C}$  pätee  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z} > 0$  ja siten  $e^z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Olkoon  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  mielivaltainen ja tarkastellaan yhtälöä  $e^z = w$ . Voimme kirjoittaa  $w = re^{i\varphi}$ , jossa  $r > 0$ , ja  $z = x + iy$ . Tällöin yhtälö saa muodon  $e^x e^{iy} = re^{i\varphi}$ . Tämä toteutuu jos ja vain jos  $e^x = r$  (kummankin puolen modulien oltava samat!) ja  $e^{iy} = e^{i\varphi}$ . Ensimmäisen yhtälön ainoa ratkaisu on  $x = \log r$  ja toinen toteutuu jos ja vain jos  $y = \varphi + n \cdot 2\pi$  jollain kokonaisluvulla  $n$ .<sup>1</sup> Näin saaduista  $y$ :n arvoista tasan yksi toteuttaa ehdon  $y_0 \leq y < y_0 + 2\pi$ . Siten yhtälöllä  $e^z = w$  on joukossa  $S_{y_0}$  tasan yksi ratkaisu  $z = x + iy$ .  $\square$

Pannaan lopuksi merkille, miten eksponenttifunktio kuvaa kompleksitason koordinaattiakselien suuntaiset suorat. Vaakasuora  $\operatorname{Im} z = y_0$  kuvautuu origosta lähtevälle puolisuoralle  $\arg w = y_0$ , jossa origo ei ole mukana. Pystysuora  $\operatorname{Re} z = x_0$  puolestaan kuvautuu origokeskiselle ympyränkehälle  $|w| = e^{x_0}$ . (Selvitä itsellesi, miksi näin on.)

<sup>1</sup>Näissä muistiinpanoissa  $\log$  tarkoittaa luonnollista eli  $e$ -kantaista logaritmia.



### Logaritmifunktio

Jos  $r$  on positiivinen reaaliluku, niin sen logaritmi  $x = \log r$  on se yksikäsitteinen reaaliluku, jolle  $e^x = r$ . Kompleksitasossa logaritmin käsite on mutkikkaampi, sillä lauseen 5.9 mukaan eksponenttifunktio on nyt jaksollinen ja saa kunkin arvonsa äärettömän monessa eri pisteessä. Kun  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , yhtälöllä  $e^z = w$  on siis äärettömän monta ratkaisua; ne käyvät ilmi vaikkapa lauseen 5.10 todistuksesta.

**5.11 Määritelmä.** Luvun  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  *logaritmilla*  $\log w$  on äärettömän monta arvoa, ja ne ovat

$$\log w = \log|w| + i \arg w + n \cdot 2\pi i, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

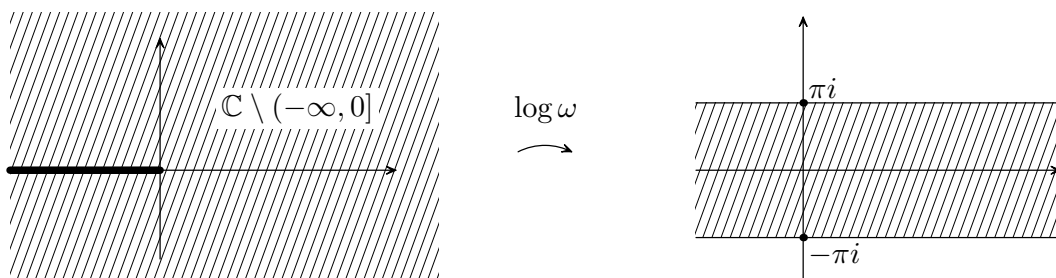
jossa  $\arg w$  on jokin  $w$ :n argumentin arvoista.

Kuten jo lauseessa 5.10 totesimme, annetussa jaksovyössä  $S_{y_0}$  sijaitsee täsmälleen yksi näistä arvoista. Näin saadaan yksikäsitteinen funktio punkteeratulta tasolta  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  ko. jaksovyölle. Yhtäpitävästi tämän voi ajatella niin, että kiinnitetään yo. määritelmässä  $n$  ja annetaan  $\arg w$ :n vaihdella sopivalla  $2\pi$ :n pituisella välillä (esim.  $n = 0$  ja  $y_0 \leq \arg w < y_0 + 2\pi$ ).

Luonteva jaksovyön valinta voisi olla  $S_{-\pi}$  (vrt. juurifunktion määrittely edellisen luvun lopussa). Funktio  $\log: \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow S_{-\pi}$  ei kuitenkaan ole jatkuva negatiivisella reaaliakselilla, koska vastaava argumentti,  $-\pi \leq \arg w < \pi$ , ei ole siellä jatkuva (mietä miksi). Jatkuvan haaran (ks. määr. 3.23) saamiseksi rajoitutaan negatiivista reaaliakselia pitkin aukileikattuun tasoon  $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ , jossa

$$(5.12) \quad \log w = \log|w| + i \arg w, \quad -\pi < \arg w < \pi.$$

Kutsumme tätä *logaritmin päähaaraksi*. Muut logaritmin haarat  $A$ :ssa saadaan lisäämällä tähän jokin  $2\pi i$ :n monikerta.



**5.13 Lause.** *Logaritmin päähaara (5.12) alueessa  $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  on analyyttinen funktio ja*

$$\frac{d}{dw} \log w = \frac{1}{w}.$$

*Todistus.* Koska  $\frac{d}{dz} e^z = e^z \neq 0$  kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ , voimme päätellä käänteisfunktion derivointilauseesta 3.24, että väite on todistettu, kunhan osoitamme, että funktio (5.12) on jatkuva  $A$ :ssa. Tunnetusti  $w \mapsto |w|$  ja reaalinen logaritmi ovat jatkuvia, joten reaaliosa  $\log|w|$  on jatkuva. Imaginaariosan eli  $\arg w$ :n jatkuvuus  $A$ :ssa on puolestaan osoitettu Lauseessa 2.19.  $\square$

Täsmälleen samalla tavalla logaritmista saadaan hyvin määritelty analyyttinen funktio mitä tahansa origosta lähtevää puolisuoraa pitkin leikatussa kompleksitasossa

$$A_{y_0} = \{z \in \mathbb{C} : y_0 < \arg(z) < y_0 + 2\pi\}.$$

Myös näin saatuja logaritmin jatkuvia ja yksiarvoisia rajoittumia kutsutaan logaritmin haaroiksi. Nyt  $\log z$  kuvaa  $A_{y_0}$ :n bijektiivisesti *avoimelle* jaksovyölle  $\{z \in \mathbb{C} : y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}$ . Monissa kirjoissa päähaaraksi kutsutaan positiivista reaaliakselia pitkin aukileikatussa tasossa  $\mathbb{C} \setminus [0, \infty)$  määriteltyä haaraa, jonka imaginaariosa vaihtelee välillä  $(0, 2\pi)$ .

Logaritmillä voi pienin varauksin laskea kuten reaalisisessä tapauksessa.

**5.14 Lause.** *Jos  $\log$  on jokin logaritmin haara ja  $z_1, z_2, z_1 z_2$  ja  $z_1/z_2$  kuuluvat sen määrittelyjoukkoon, niin seuraavat yhtälöt pätevät luvun  $2\pi i$  monikertaa vaille:*

$$\log z_1 z_2 = \log z_1 + \log z_2, \quad \log \frac{z_1}{z_2} = \log z_1 - \log z_2.$$

*Todistus.* Väitteet seuraavat siitä, että  $e^{w_1+w_2} = e^{w_1} e^{w_2}$  ja  $e^{w_1-w_2} = e^{w_1}/e^{w_2}$ , ja toisaalta, että  $e^{w_1} = e^{w_2}$  jos ja vain jos  $w_1$  ja  $w_2$  ovat samat  $2\pi i$ :n monikertaa vaille.  $\square$

### Kompleksinen potenssifunktio

Logaritmfunktion avulla voimme määritellä myös mielivaltaisen potenssifunktion: Jos  $z \neq 0$  ja  $a \in \mathbb{C}$ , niin asetamme

$$z^a = \exp(a \log z).$$

Koska logaritmi on moniarvoinen funktio, moniarvoisuus pätee myös yleiselle kompleksiselle potenssille: Jos  $\arg z$  on kiinnitetty johonkin arvoonsa, niin  $\log z = \log|z| + i \arg z + 2n\pi i$  ja siten

$$z^a = \exp\{a(\log|z| + i \arg z + n \cdot 2\pi i)\} = |z|^a \exp\{a(i \arg z + n \cdot 2\pi i)\},$$

jossa  $n$  saa kaikki kokonaislukuarvot. Jos yleisestä potenssista halutaan yksiarvoinen funktio, meidän tulee valita sille jokin haara – käytännössä valitsemalla logaritmilta jokin haara.



Erikoistapauksena on kuitenkin syytä huomata, että jos  $a$  on kokonaisluku, niin  $\exp\{a(i \arg z + n \cdot 2\pi i)\} = \exp(ai \arg z)$  jokaisella  $n$ , joten  $z^a$ :lla on vain yksi arvo! Se yhtyy aikaisempaan tuttuun kokonaislukupotenssin määritelmään. Toisena erikoistapauksena  $a = 1/k$ , jossa  $k = 2, 3, \dots$ , saadaan Luvun 3 lopussa käsitelty  $k$ :s juuri. Logaritmin päähaaran valinta johtaa tällöin juuren päähaaraan.

Tarkastellaan vielä hieman eksoottisempaa esimerkkiä:

**5.15 Esimerkki.** Lasketaan luvun  $i^i$  kaikki arvot. Nyt  $\arg i = \pi/2$ , joten  $\log i = i\pi/2 + n \cdot 2\pi i$ . Saadaan

$$i^i = \exp\{i(i\pi/2 + n \cdot 2\pi i)\} = \exp(-\pi/2 - n \cdot 2\pi), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Luvulla  $i^i$  on siis äärettömän monta arvoa, jotka kaikki ovat positiivisia reaalilukuja.

### Täydennys

Lopuksi täydennämme vielä aikaisemmin keskenjääneen todistuksen.

*Lauseen 3.19 todistus (loppuosa).* Oletetaan, että  $\arg f$  on vakio  $\theta_0$  ja  $f$  ei saa arvoa nolla. Tämä merkitsee, että  $f$ :n arvot sijaitsevat origosta lähtevällä puolisuoralla, jonka vaihekulma on  $\theta_0$ . Tämä sisältyy esimerkiksi origon suhteen kahta vastakkaista puolisuoraa pitkin aukileikattuun tasoon, jossa logaritmillä on haara  $\log$ . Näin yhdistetty funktio  $\log f$  on hyvinmääritelty ja analyyttinen, ja oletuksen mukaan sen imaginaariosa on vakio. Siten lauseen aikaisemmin todistetusta osasta seuraa, että  $\log f$  on vakio ja siis  $f$  on vakio.

Oletetaan sitten, että  $|f|$  on vakio  $c$ . Jos  $c = 0$ , niin  $f \equiv 0$ . Muuten  $c > 0$  ja  $f$ :n arvojoukko sisältyy siis ympyrään  $|w| = c$ . Tällöin voimme päätellä esimerkiksi seuraavasti:

Jos  $z \in A$ , jatkuvuuden takia voimme valita  $z$ :n ympäristön  $D_z = D(z, r_z)$  ja origosta lähtevää puolisuoran  $L$ , niin että  $f(D_z) \cap L = \emptyset$ . Kun valitsemme logaritmin haaran pitkin puolisuoraa  $L$  leikatussa tasossa, kuten edellä tästä seuraa, että  $\log f$  on analyyttinen  $D_z$ :ssa. Oletuksen johdosta sen reaaliosa  $\log|f|$  on vakio, joten päättelemme, että  $f$  on vakio  $D_z$ :ssa. Siis jokaisella  $A$ :n pisteellä on ympäristö, jossa  $f$  on vakio.  $A$ :n yhtenäisyydestä seuraa tällöin, että  $f$  on vakio koko  $A$ :ssa (vapaa harjoitustehtävä).  $\square$

## 6 Konformisuus ja laajennettu taso

Tarkastelemme tässä luvussa analyyttisten funktioiden keskeistä geometrista ominaisuutta, *konformisuutta*. Tässä on kysymys siitä, että niissä pisteissä, joissa derivaatta ei häviä, analyyttinen funktio on ”kulmat säilyttävä” kuvaus.

Esittelemme myös tavan laajentaa kompleksitasoa lisäämällä siihen äärettömyyspiste. Laajennettu taso voidaan kuvata ns. *Riemannin pallona*. Yleistämme hieman analyyttisyyden ja konformisuuden käsitteitä, jotta voimme puhua niistä myös laajennetussa tasossa.

Konformisuuteen liittyy myös seuraava ongelma: miten kuvata (laajennetun) kompleksitason alue toiselle alueelle konformisella bijektiolla. Mietimme lopuksi muutamia tähän aihepiiriin kuuluvia ideoita.

### Polun tangentti

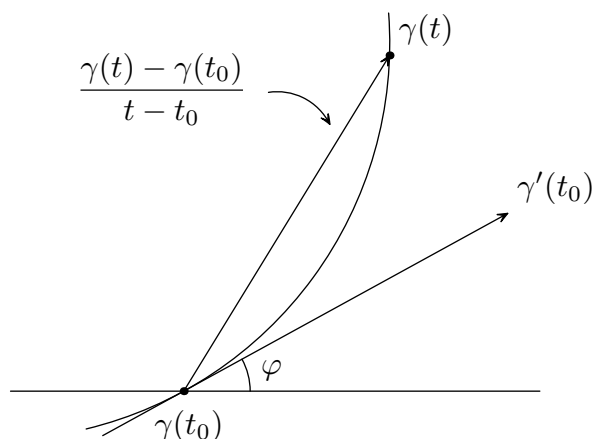
Palautetaan mieleen (ks. luvun 2 loppu), että jatkuvaa kuvausta  $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  ( $a < b$ ) kutsutaan *poluksi*. Sen *alkupiste* on  $\gamma(a)$  ja *loppupiste*  $\gamma(b)$ ; näitä molempia voidaan kutsua *päätepisteiksi*. Jos kuvajoukko  $\gamma([a, b])$  sisältyy joukkoon  $A$ , sanotaan, että  $\gamma$  on  $A$ :n polku. On huomattava, että polku on eri asia kuin joukko  $\gamma([a, b])$ , jota voi tarpeen vaatiessa kutsua *käyräksi*. Toisaalta *parametrivälin*  $[a, b]$  valinnalla ei sinänsä ole useimmiten merkitystä, ja esimerkiksi affinia bijektiota  $\eta: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ ,  $\eta(t) = a + t(b-a)$ , käyttämällä voimme aina korvata polun  $\gamma$  polulla  $\gamma \circ \eta$ , jolloin parametriväliksi tulee yksikköväli  $[0, 1]$ . Tarvittaessa hajotamme  $\gamma$ :n reaali- ja imaginaariosaansa kirjoittamalla

$$\gamma(t) = (\alpha(t), \beta(t)) = \alpha(t) + i\beta(t), \quad a \leq t \leq b.$$

Oletetaan, että  $t_0$  on sellainen piste, jossa polku  $\gamma$  on derivoituva (eli yllä  $\alpha$  ja  $\beta$  ovat derivoituvia) ja  $\gamma'(t_0) = \alpha'(t_0) + i\beta'(t_0) \neq 0$ . Toisin sanoen on olemassa raja-arvo

$$\gamma'(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{\gamma(t) - \gamma(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Voidaan sanoa, että piste  $t_0$  on polun  $\gamma$  *säännöllinen piste*. Kuten alla oleva geometrisen tarkastelu osoittaa, tällaisessa pisteessä polulla  $\gamma$  on hyvinmääritelty ”suunta” tai *tangentti*, jota kuvaa *tangenttivektori*  $\gamma'(t_0)$ . Vastaavalla *tangenttisuoralalla* on parametriesitys  $s \mapsto \gamma(t_0) + s\gamma'(t_0)$ , jossa  $s \in \mathbb{R}$ . Lisäksi kulma  $\varphi = \arg \gamma'(t_0)$  on tangentin (tai yhtä hyvin itse polun) *suuntakulma*.



Geometrisesti tämä menettää merkityksensä, jos  $\gamma'(t_0) = 0$ . (Mikä olisi esimerkiksi vakiopolulle  $t \mapsto z_0$  piirretty tangentti?)

### 6.1 Esimerkki. Määritellään

$$\gamma(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t \leq 1, \\ 1 + (t-1)i, & 1 \leq t \leq 2, \\ i + 3 - t, & 2 \leq t \leq 3, \\ (4-t)i, & 3 \leq t \leq 4. \end{cases}$$

Tämä on *umpinainen* polku, sillä  $\gamma(0) = \gamma(4) = 0$ . Itse asiassa  $\gamma$ :n kuvajoukko on murtoviiva, joka koostuu nelion sivuista (piirrä kuva). Kaikki muut pisteet paitsi 1, 2 ja 3 ovat säännöllisiä pisteitä. Pisteitä 0 ja 4 voitaneen pitää säännöllisinä, vaikkakin niissä derivaatat ja tangentit ovat vain toispuoleisia.

## Konformisuus

Olkoon nyt  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  analyyttinen, ja  $\gamma : [a, b] \rightarrow A$  säännöllinen polku  $A$ :ssa. Mikä on polun  $f \circ \gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  tangenttivektori pisteessä  $f(\gamma(t_0))$  ?

Tämän määrittämiseksi merkitään  $z_0 = \gamma(t_0)$ , ja olkoon  $h = \gamma(t_0 + \delta) - \gamma(t_0)$ , missä  $|\delta|$  on riittävän pieni. Nyt

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = f'(z_0)h + h\epsilon_1(|h|),$$

ja koska  $\gamma$  on derivoituva, niin  $h = \gamma(t_0 + \delta) - \gamma(t_0) = \gamma'(t_0)\delta + \delta\epsilon_2(|\delta|)$ . Koska  $\epsilon_2$  on rajoitettu funktio, on olemassa vakio  $C$  siten, että  $|h| \leq C\delta$ , eli saamme

$$f(\gamma(t_0 + \delta)) - f(\gamma(t_0)) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)\delta + \delta\epsilon(|\delta|),$$

Siis  $(f \circ \gamma)'(t_0) = f'(\gamma(t_0))\gamma'(t_0)$  on haettu tangenttivektori. Toisin sanoen, yhdistetyn polun tangenttivektori saadaan kertomalla  $\gamma'(t_0)$  kompleksiluvulla  $f'(\gamma(t_0))$ , ja tangenttivektori on nolasta eroava, jos ja vain jos  $f'(\gamma(t_0)) \neq 0$ . Havaitaan:

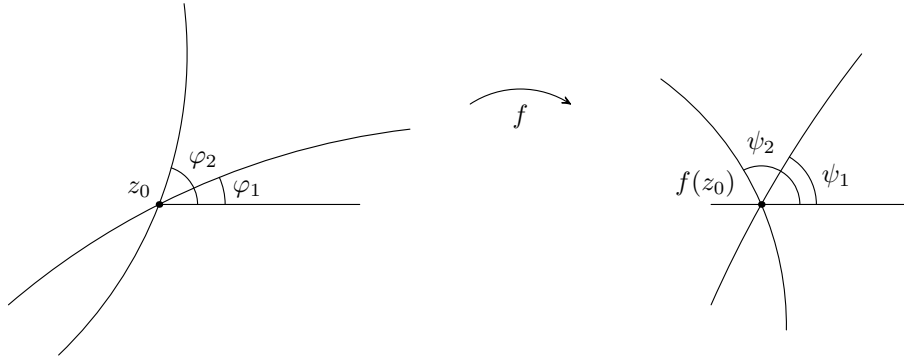
*Mikäli  $f$  on analyyttinen  $A$ :ssa ja  $f'(\gamma(t_0)) \neq 0$ , niin yhdistetyllä polulla  $f \circ \gamma$  pisteessä  $t_0$  tangentti jonka suuntakulma on*

$$(6.2) \quad \psi = \arg f'(\gamma(t_0)) + \varphi, \quad \text{kun } \varphi = \arg \gamma'(t_0)$$

Olkoot meillä sitten kaksi säännöllistä polkua  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  jotka kulkevat saman pisteen  $z_0$  kautta kuten ao. kuvassa. Polkujen tangenttien suuntakulmat olkoot  $\varphi_1$  ja  $\varphi_2$ , jolloin polkujen välinen kulma on

$$\varphi_1 - \varphi_2$$

Jos  $f$  on analyyttinen  $z_0$ :n ympäristössä sekä  $f'(z_0) \neq 0$ , niin havainnon (6.2) nojalla kuvapolkujen väliseksi kulmaksi saadaan täsmälleen sama (!) kulma:  $\psi_1 - \psi_2 = \varphi_1 - \varphi_2$ .



Toisin sanoen, olemme näyttäneet että jokainen analyyttinen kuvaus  $f$ , jolle  $f'(z) \neq 0$ , säilyttää säännöllisten polkujen väliset kulmat! Tätä geometrista ominaisuutta, kulmien säilymistä, kutsutaan kuvauksen konformisuudeksi.

**6.3 Määritelmä.** Avoimessa joukossa  $A$  analyyttinen funktio  $f$  on *konforminen pisteessä*  $z \in A$ , jos  $f'(z) \neq 0$ . Funktio  $f$  on *konforminen joukossa*  $A$ , jos se on konforminen jokaisessa  $A$ :n pisteessä.

Ylläolevan tarkastelun voi tulkita myös niin että konforminen kuvaus  $f$  kiertää pisteen  $z_0$  kautta kulkevien polkujen tangenttivektoreita kulman  $\arg(f'(z_0))$  verran. Toinen havainto saadaan tutkimalla, kuinka konforminen kuvaus muuntaa (infinitesimaalisia) etäisyyksiä: konformikuvauksen  $f$  *lokaali suurennussuhde* pisteessä  $z_0$  on

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{|f(z_0 + h) - f(z_0)|}{|h|} = |f'(z_0)|.$$

Voimme siis muotoilla edellä olevan siten, että konformikuvaus vastaa pisteessä  $z_0$  siirtoa pisteeseen  $f(z_0)$ , jonka jälkeen kierrämme infinitesimaalisesti kulman  $\arg f'(z_0)$  verran ja lopuksi skaalaamme tekijällä  $|f'(z_0)|$ .

*Huomautus.* Konformisuutta voisi lähestyä myös Cauchy-Riemannin yhtälöistä käsin (päätyen samaan lopputulokseen): Jos  $f = u + iv$  on analyyttinen ja  $f'(z_0) \neq 0$ , merkitään  $u_x(z_0) + iu_y(z_0) = re^{i\varphi}$ . Silloin  $u_x(z_0) = r \cos \varphi$ ,  $u_y(z_0) = r \sin \varphi$  ja Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla, sekä Vektorianalyysin merkinnöin

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Siis tason  $\mathbb{R}^2$ :n lineaarikuvauksena, analyttisen funktion  $f$  derivaatta on kierto kulman  $\varphi$  verran yhdistettynä venytykseen/kutistukseen. Erityisesti  $Df(z_0)$  on kulmat säilyttävä.

### Riemannin pallo

Useissa funktioteorian tarkasteluissa on hyödyllistä laajentaa kompleksitasoa lisäämällä siihen äärettömyyspiste. Tämä merkitsee myös tason kompaktifointia.

Olkoon  $\infty$  symboli, joka merkitsee *äärettömyyspistettä*, ja määritellään *laajennettu kompleksitaso*

$$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}.$$

Määrittelemme topologian laajennettuun tasoon sopimalla, että joukot

$$D(\infty, r) = \{\infty\} \cup \{z \in \mathbb{C} : |z| > r\} \quad (r > 0)$$

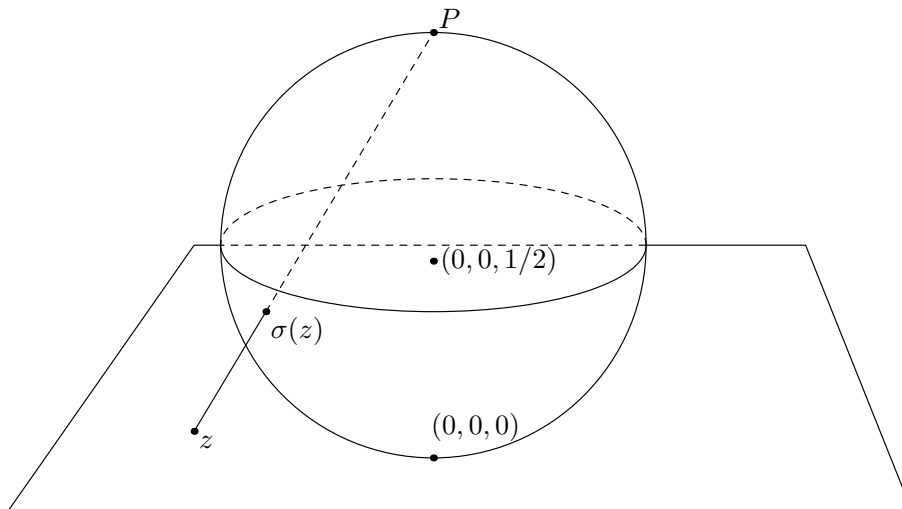
ovat pisteen  $\infty$  ympäristöjä. Topologian kielellä nämä muodostavat ympäristökannan pisteelle  $\infty$  aivan kuten kiekot  $D(z, r)$  ( $r > 0$ ) muodostavat ympäristökannan äärelliselle pisteelle  $z \in \mathbb{C}$ . Avoimet joukot ym. käsitteet voidaan nyt määritellä tavalliseen tapaan ympäristöjen avulla.

Laajennettu kompleksitaso  $\bar{\mathbb{C}}$  voidaan luonnollisella tavalla tulkita kaksiulotteisena pallona (pallon pintana) kolmiulotteisessa avaruudessa. Ajatellaan  $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$  upotetuksi euklidiseen avaruuteen  $\mathbb{R}^3$  tasoksi  $\{(x_1, x_2, x_3) : x_3 = 0\}$  samastamalla piste  $z = x + iy$  pisteeksi  $(x, y, 0)$ . *Riemannin pallo*  $\mathbb{S}$  on pallo, joka on tämän tason yläpuolella ja sivuaa tasoa origossa ja jonka halkaisija on 1. Pallon keskipiste on täten  $(0, 0, \frac{1}{2})$  ja

$$(6.4) \quad \mathbb{S} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1^2 + x_2^2 + (x_3 - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}\}$$

Pallon *pohjoisnapa* on  $P = (0, 0, 1)$ .

Kun  $z = x + iy = (x, y, 0)$  on kompleksitason piste, pohjoisnavan  $P$  ja pisteen  $z$  välinen yhdysjana  $[P, z]$  leikkaa pallon  $\mathbb{S}$  yhdessä pisteessä, jolle annamme merkinnän  $\sigma(z)$ . Näin saatu kuvaus  $\sigma$  on bijektio  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{S} \setminus \{P\}$  kuten alla oleva kuva kertoo.



Tälle kuvaukselle voi laskea eksplisiittisen lausekkeen

$$(6.5) \quad \sigma(z) = \frac{1}{1 + |z|^2}(x, y, |z|^2), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

ja sen käänteiskuvaus on

$$(6.6) \quad \sigma^{-1}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{1 - x_3}(x_1 + ix_2), \quad (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{S} \setminus \{P\}.$$

Näiden lausekkeiden johtaminen jää harjoitustehtäväksi. (Lausekkeen (6.6) saa esimerkiksi tutkimalla kahta yhdenmuotoista suorakulmaista kolmioita: yhden kärkipisteet ovat  $P$ , origo ja  $z$ , toisen kärkipisteet ovat  $P$ ,  $(0, 0, x_3)$  ja  $\sigma(z) = (x_1, x_2, x_3)$ .)

Näin saatu vastaavuus pallon ja tason välillä on nimeltään *stereografinen projektio*, ja sillä on käyttöä esimerkiksi kartografiassa. Kaavoista (6.5) ja (6.6) havaitsemme, että  $\sigma$  ja  $\sigma^{-1}$  ovat kumpikin jatkuvia, kun Riemannin pallolla käytetään tavallista  $\mathbb{R}^3$ :n topologiaa. Jatkamme tämän vastaavuuden laajennettuun tasoon  $\overline{\mathbb{C}}$  asettamalla  $\sigma(\infty) = P$ . Tällöin ympäristö  $D(\infty, r)$  vastaa pohjoisnavan kalottiympäristöä  $\mathbb{S}$ :ssä, joten myös laajennettu kuvaus  $\sigma: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{S}$  ja sen käänteiskuvaus ovat jatkuvia bijektioita. Kyseessä on siis *homeomorfismi* laajennetun kompleksitason ja Riemannin pallon välillä.

Koska  $\mathbb{S}$  on osajoukko metrisessä avaruudessa  $\mathbb{R}^3$ , voimme itse asiassa indusoida stereografisen projektion avulla laajennettuun tasoon metriikan  $d$ . Se saadaan kaavoista

$$d(z, w) = \|\sigma(z) - \sigma(w)\|, \quad d(z, \infty) = \|\sigma(z) - P\|,$$

jossa  $\|\cdot\|$  on euklidinen metriikka  $\mathbb{R}^3$ :ssa. Sille voidaan johtaa lausekkeet

$$d(z, w) = \frac{|z - w|}{\sqrt{1 + |z|^2}\sqrt{1 + |w|^2}}, \quad d(z, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |z|^2}},$$

kun  $z, w \in \mathbb{C}$  (harjoitustehtävä). Metriikkaa  $d$  kutsutaan laajennetun kompleksitason *pallometriikaksi*. Sen rajoittuma  $\mathbb{C}$ :hen on ekvivalentti tavallisen metriikan  $|z - w|$  kanssa, sillä kumpikin antavat  $\mathbb{C}$ :hen saman topologian.

Koska stereografinen projektio on homeomorfismi, laajennettu kompleksitaso on siis topologisesti täysin samanlainen kuin Riemannin pallo. Erityisesti  $\overline{\mathbb{C}}$  on kompakti, koska  $\mathbb{S}$  on kompakti euklidisen avaruuden suljettuna ja rajoitettuna osajoukkona. Tämän voi toki päätellä helposti suoraankin esimerkiksi jonojen avulla.

**6.7 Huomautus.** Yllä esitetty tapa tulkita  $\overline{\mathbb{C}}$  stereografisen projektion kautta on erityisen luonnollinen kompleksianalyysin kannalta siksi, että stereografinen projektio on konforminen eli kulmat säilyttävä. Lisäksi siinä tason suorat, joihin laajennetussa tasossa sisällytämme myös pisteen  $\infty$ , vastaavat Riemannin pallon pohjoisnavan kautta kulkevia ympyröitä ja tason ympyrät vastaavat muita pallolla kulkevia ympyröitä. Puolitasot ja kiekot  $\mathbb{C}$ :ssä vastaavat puolestaan ympyräkalotteja Riemannin pallolla. (Nämä seikat on helppo uskoa eivätkä myöskään vaikeita todistaa. Sivuumme kuitenkin todistukset tässä.)

## Raja-arvot ja jatkuvuus $\overline{\mathbb{C}}$ :ssä

Tarkastellaan jonoa  $(z_n)$  laajennetussa tasossa  $\overline{\mathbb{C}}$ . Koska ”kiekot”  $D(\infty, r)$  muodostavat pisteen  $\infty$  ympäristökannan, suppenemisen tavallinen määritelmä sanoo, että  $z_n \rightarrow \infty$  jos ja vain jos jokaisella  $r > 0$  on olemassa luku  $N(r)$  siten, että  $z_n \in D(\infty, r)$  kun  $n > N(r)$ . Ehto  $z_n \in D(\infty, r)$  tarkoittaa, että  $|z_n| > r$  tai  $z_n = \infty$ . Havaitsemme tästä, että  $z_n \rightarrow \infty$  laajennetussa kompleksitasossa jos ja vain jos  $|z_n| \rightarrow +\infty$  reaalilukujonon (epäoleellisen) raja-arvon mielessä.

Tässä yhteydessä on huomattava, että laajennetussa kompleksitasossa on vain yksi äärettömyyspiste – toisin kuin reaaliakselin tyypillisessä laajennuksessa kahdella äärettömyyspisteellä  $\pm\infty$ .

**6.8 Esimerkki.** Jos  $z$  on mielivaltainen kompleksiluku, jolle  $|z| > 1$ , niin  $z^n \rightarrow \infty$   $\overline{\mathbb{C}}$ :ssä. Jos  $x$  on reaaliluku, jolle  $x < -1$ , ja jonoa  $(x^n)$  tarkastellaan reaalilukujonona, sillä ei ole (epäoleellistakaan) raja-arvoa; pätee nimittäin  $x^{2n} \rightarrow +\infty$  ja  $x^{2n+1} \rightarrow -\infty$ .

Vastaavalla tavalla kiekkoympäristöjen avulla käsitellään funktioiden raja-arvot tai jatkuvuus äärettömyyspisteessä. Yleisesti pätee, että  $\lim_{z \rightarrow a} f(z) = b$  jos ja vain jos jokaisella  $r > 0$  on olemassa  $s > 0$  siten, että  $f(z) \in D(b, r)$ , kun  $z \in D(a, s) \setminus \{a\}$ . Tässä  $a$  ja/tai  $b$  voi olla äärettömyyspiste.

Useimmiten on kätevää palauttaa äärettömyyspistettä koskevat tarkastelut apukuvauksella  $z \mapsto 1/z$  origoon. Jatkamme tämän kuvauksen luonnollisesti bijektioksi (itse asiassa homeomorfismiksi)  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  sopimalla, että  $1/\infty = 0$  ja  $1/0 = \infty$ . Koska  $z \in D(\infty, r) \Leftrightarrow 1/z \in D(0, 1/r)$ , pätee

$$\begin{aligned}\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = b &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} f(1/z) = b \quad (b \in \mathbb{C}) \\ \lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{f(z)} = 0 \quad (a \in \mathbb{C}) \\ \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty &\Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0.\end{aligned}$$

Näin menetellen tarkastelut voidaan tehdä tutulla ”äärellisellä” analyysin koneistolla.

## Analyttisyys ja konformisuus $\overline{\mathbb{C}}$ :ssä

Apukuvauksen  $z \mapsto 1/z$  avulla laajennamme seuraavaksi analyttisen funktion käsitteen koskemaan funktioita, jotka ovat määriteltyjä äärettömyyspisteen ympäristössä ja/tai saavat arvon  $\infty$ .

**6.9 Määritelmä.** Oletetaan, että funktio  $f$  on määritelty pisteen  $\infty$  ympäristössä  $D(\infty, r)$  ja saa siellä arvoja  $\mathbb{C}$ :ssä.

- $f$  on *analyttinen*  $\infty$ :ssä, jos funktio  $z \mapsto f(1/z)$  on analyttinen origossa.
- $f$  on *konforminen*  $\infty$ :ssä, jos yo. funktio  $z \mapsto f(1/z)$  on konforminen origossa (eli sen derivaatta 0:ssa on  $\neq 0$ ).

Mikäli funktio saa arvon  $\infty$ , käytämme samaa ideaa. On kuitenkin hyödyllistä ja alan perinteen velvoittamaa ottaa tässä tilanteessa käyttöön uusi nimitys analyytisyydelle.

**6.10 Määritelmä.** Oletetaan, että funktio  $f$  on määritelty pisteen  $z_0$  ympäristössä ja  $f(z_0) = \infty$ .

a) Jos  $z_0 \in \mathbb{C}$ ,  $f$  on *meromorfinen*  $z_0$ :ssa, mikäli funktio  $z \mapsto 1/f(z)$  on analyytinen  $z_0$ :ssa.

b) Jos  $z_0 = \infty$ ,  $f$  on *meromorfinen*  $z_0$ :ssa, mikäli funktio  $z \mapsto 1/f(1/z)$  on analyytinen  $0$ :ssa.

Kummassakin tapauksessa piste  $z_0$  on  $f$ :n *napa*. Konformisuus määritellään analogisesti vaatimalla, että vastaavan yhdistetyn funktion derivaatan arvo  $z_0$ :ssa tai  $0$ :ssa on  $\neq 0$ .

**6.11 Huomautus.** Kun funktioteoriassa puhutaan *analyttisistä* funktioista, tarkoitetaan ainakin pääsääntöisesti funktioita, joiden arvot ovat (äärellisiä) kompleksilukuja. Äärettömyyspiste saattaa kuitenkin kuulua funktion määrittelyjoukkoon. Jos halutaan sallia navat, puhutaan *meromorffifunktioista*. Yksi syy tähän erotteluun on se, että kompleksiarvoisilla analyttisillä funktioilla on joitakin ominaisuuksia, jotka puuttuvat yleisiltä meromorffifunktioilta.

**6.12 Esimerkki.** Olkoon

$$f(z) = \frac{z}{z^2 - 4}.$$

Funktio  $f$  on selvästi analyytinen joukossa  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 2\}$ . Jatkamme sen koko laajennettuun tasoon asettamalla  $f(\pm 2) = \infty$  ja  $f(\infty) = 0$ . Tällöin  $f$  on jatkuva  $\overline{\mathbb{C}}$ :ssä.

Funktio

$$f(1/z) = \frac{z}{1 - 4z^2}$$

on analyytinen origossa (ts. jossakin origon ympäristössä), joten  $f$  on analyytinen  $\infty$ :ssä. Itse asiassa se on siellä jopa konforminen (tarkista laskemalla derivaatan arvo!). Toisaalta funktio

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{z^2 - 4}{z}$$

on analyytinen pisteissä  $\pm 2$ , joten nämä pisteet ovat  $f$ :n nappoja ja  $f$  on niissä meromorfinen (jopa konforminen).

Kaiken kaikkiaan voidaan sanoa, että  $f$  on laajennetussa kompleksitasossa meromorfinen funktio, jolla on navat  $\pm 2$ .

**6.13 Esimerkki.** a) Tarkastellaan polynomia  $P(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ , joka on asetettu  $n \geq 1$ ; oletamme siis, että  $a_n \neq 0$ . Määritellään  $P(\infty) = \infty$ . Koska polynomilla on vain äärellinen määrä nollakohtia, on  $P(z) \neq 0$ , kun  $|z|$  on riittävän suuri. Tämän voi myös nähdä seuraavasti (kajoamatta nollakohtiin sinänsä) kolmioepäyhtälön



avulla:

$$\begin{aligned} |P(z)| &\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z|^{n-1} - \dots - |a_0| \\ &= |z|^n \left( |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right) > 0, \end{aligned}$$

kunhan vain  $|z|$  on riittävän suuri. Siten  $P(1/z) \neq 0$ , kun  $|z| < r$  kyllin pienelle  $r > 0$ . Näillä  $z$  voimme kirjoittaa

$$\frac{1}{P(1/z)} = \frac{1}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}} = \frac{z^n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}.$$

Tämä funktio on analyyttinen pisteessä  $z = 0$ , joten  $P$  on meromorfinen  $\infty$ :ssä.

Näemme siis, että jokainen astetta  $n \geq 1$  oleva polynomi on aina meromorfinen pisteessä  $\infty$ . (Lisätehtävänä totea, että se on konforminen  $\infty$ :ssä vain tapauksessa  $n = 1$ .) Astetta nolla oleva polynomi on vakiofunktio ja siis triviaalisti analyyttinen pisteessä  $\infty$ .

b) Tarkastellaan yleisemmin rationaalifunktiota

$$R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)}{b_m(z - w_1) \cdots (z - w_m)},$$

jossa  $P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n)$  ja  $Q(z) = b_m(z - w_1) \cdots (z - w_m)$  ovat polynomeja ja  $a_n, b_m \neq 0$ . Oletamme, että tämä on  $R$ :n ns. supistettu muoto, jolloin  $P$  ja  $Q$  ovat keskenään jaottomia eli niillä ei ole yhteisiä nollakohtia. Aikaisemman perusteella (ks. seuraus 3.6) tiedämme, että  $R$  on analyyttinen pisteissä  $z \neq w_1, \dots, w_m, \infty$ .

Jatkamme  $R$ :n nimittäjän nollakohtiin asettamalla  $R(w_j) = \infty$  kaikilla  $j = 1, \dots, m$ . Tällöin pisteet  $w_j$  ovat  $R$ :n napoja, joissa  $R$  on meromorfinen. Jatke äärettömyyspisteeseen riippuu osoittajan ja nimittäjän asteista. Jos  $n > m$ , saadaan kuten polynomien tapauksessa, että  $R$  on meromorfinen  $\infty$ :ssä, kun  $R(\infty) = \infty$ . Muutoin  $R$  on analyyttinen  $\infty$ :ssä, kun asetetaan  $R(\infty) = a_n/b_n$  tapauksessa  $n = m$  ja  $R(\infty) = 0$  tapauksessa  $n < m$ . (Tarkista nämä väitteet harjoitustehtävänä!)

## Möbius-kuvaukset

Möbius-kuvaukset ovat ensimmäisen asteen rationaalifunktioita. Ne ovat laajennetun kompleksitason konformisia bijektioita itselleen. Niillä on monia hyödyllisiä geometrisia ominaisuuksia, ja niiden avulla voidaan ratkaista erilaisia kuvaustehtäviä, mm. kuvata puolitaso konformisesti kiekolle.

**6.14 Määritelmä.** Funktio  $f: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ ,

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

on *Möbius-kuvaus*, kun  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  ja  $ad - bc \neq 0$ .

Jos ehto  $ad - bc \neq 0$  ei olisi voimassa,  $f$  olisi vakio tai mieletön (harjoitustehtävä). Kuten esimerkissä 6.13b on selitetty, sovimme yo. määritelmässä, että  $f(-d/c) = \infty$  ja  $f(\infty) = a/c$  tapauksessa  $c \neq 0$  ja  $f(\infty) = \infty$  tapauksessa  $c = 0$ . Tällöin  $f$  on meromorfinen ja erityisesti jatkuva  $\overline{\mathbb{C}}$ :ssä. Paljon enemmänkin on totta:

**6.15 Lause.** Möbius-kuvaus  $f$  on konforminen bijektio  $\overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ , jonka käänteiskuvaus  $f^{-1}$  on myös Möbius-kuvaus.

*Todistus.* Olkoon  $f$  kuten määritelmässä edellä. Harjoitustehtävänä on laskettu

$$f'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \neq 0,$$

kun  $z \neq \infty$  ja  $z \neq -d/c$  (jos  $c \neq 0$ ). Tästä seuraa  $f$ :n konformisuus lukuunottamatta näitä yhtä tai kahta pistettä. Olkoon  $c \neq 0$ . Kirjoitamme  $1/f(z) = (cz + d)/(az + b)$  ja havaitsemme, että tämä on konforminen pisteessä  $z = -d/c$ , joka on  $\neq -b/a$  kertoimia koskevan ehdon takia. Siten  $f$  on konforminen tässä pisteessä, joka on  $f$ :n napa. Samoin  $f(1/z) = (a + bz)/(c + dz)$  on konforminen 0:ssa, joten  $f$  on konforminen  $\infty$ :ssä. Konformisuus  $\infty$ :ssä tapauksessa  $c = 0$  jääköön lukijalle.

Määritellään

$$g(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Tämä on Möbius-kuvaus, sillä  $da - (-b)(-c) = ad - bc \neq 0$ . Suora lasku osoittaa, että  $g(f(z)) = z$  kaikilla  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  ja  $f(g(w)) = w$  kaikilla  $w \in \overline{\mathbb{C}}$ . (Navat ja piste  $\infty$  on syytä tarkistaa erikseen tai sitten voi todeta, kuten jatkossa usein teemme, että koska yhtäsuuruus pätee kaikkialla muualla, se pätee jatkuvuuden nojalla myös näissä pisteissä.) Siten  $f$  on bijektio ja  $g = f^{-1}$ .  $\square$

**6.16 Lause.** Kahden Möbius-kuvauksen yhdiste on Möbius-kuvaus.

*Todistus.* Olkoot

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(w) = \frac{a'w + b'}{c'w + d'}$$

Möbius-kuvauksia. Suoralla laskulla, jonka välivaiheet sivuutamme, nähdään

$$(g \circ f)(z) = \frac{a'f(z) + b'}{c'f(z) + d'} = \frac{(aa' + cb')z + ba' + db'}{(ac' + cd')z + bc' + dd'}.$$

Tämä on Möbius-kuvaus. Kertoimia koskevan ehdon voi nimittäin tarkistaa laskemalla tai sitten voi päätellä, että koska  $f$  ja  $g$  ovat bijektioita, myös  $g \circ f$  on bijektio ja erityisesti ei-vakio.  $\square$

**6.17 Esimerkki.** Kuten harjoitustehtävissä osoitettiin, jokainen Möbius-kuvaus voidaan esittää yhdisteenä seuraavista kuvauksista:

- $z \mapsto z + a$ , jossa  $a \in \mathbb{C}$  (yhdensuuntaissiirto)
- $z \mapsto az$ , jossa  $a \neq 0$  (homotetia ja kierto; vrt. esim. 3.2b)
- $z \mapsto 1/z$  (inversio)

Siten yllä luetellut Möbius-kuvaukset *virittävät* Möbius-kuvausten ryhmän.

**6.18 Huomautus.** Kahden edellisen lauseen tuloksia ja todistuksia voi tulkita kätevästi myös matriisiryhmien näkökulmasta. Jokaista kääntyvää kompleksikertoimista  $2 \times 2$  -matriisia  $A$  vastaa luonnollisella tavalla Möbius-kuvaus  $g$  seuraavasti:

$$(6.19) \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mapsto \frac{az + b}{cz + d} = g(z).$$

Lauseke  $ad - bc$  on yo. matriisin determinantti, ja se on  $\neq 0$  täsmälleen silloin, kun matriisi on kääntyvä. Edelleen, kuvaus (6.19) on ryhmähomomorfismi, s.o. tulomatriisia  $A_1 A_2$  vastaa Möbius-kuvaus  $g_1 \circ g_2$  ja kääntematriisia  $A^{-1}$  kuvaus  $g^{-1}$ . Tämä selittää esimerkiksi kahden Möbius-kuvauksen yhdisteen kertoimet edellisessä todistuksessa, sillä

$$\begin{bmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ba' + db' \\ ac' + cd' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

### Kaksoissuhde

Kehitämme seuraavaksi työkalun, jolla voidaan konkreettisesti muodostaa Möbius-kuvauksia, joilla on halutut ominaisuudet, esimerkiksi joka vie annetun pistekolmikon toiselle annetulle pistekolmikolle. Ideana on etsiä suure, joka on invariantti Möbius-kuvauksessa.

Motivaatioksi teemme pari havaintoa. Yhdensuuntaissiirrossa  $w = z + b$  pisteiden väliset erotukset säilyvät: jos  $w_0 = z_0 + b$  ja  $w_1 = z_1 + b$ , niin

$$w_0 - w_1 = z_0 - z_1.$$

Yleisempi affiini kuvaus  $w = az + b$  ei säilytä erotuksia mutta se säilyttää sellaisten suhteet: jos  $w_j = az_j + b$  ( $j = 0, 1, 2$ ), niin

$$\frac{w_0 - w_1}{w_0 - w_2} = \frac{z_0 - z_1}{z_0 - z_2}$$

(tarkista harjoitustehtävänä).

Entä yleiset Möbius-kuvaukset? Olisiko niillä tämäntyyppinen invariantti?

**6.20 Määritelmä.** Oletetaan, että  $z_0, z_1, z_2, z_3$  ovat eri pisteitä  $\mathbb{C}$ :ssä. Niiden *kaksoissuhde* on luku

$$(z_0, z_1, z_2, z_3) = \frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_1 - z_2)}.$$

Jos jokin pisteistä on  $\infty$  tai jotkin kaksi niistä yhtyvät, määritellään  $(z_0, z_1, z_2, z_3)$  vastaavana raja-arvona.

**6.21 Esimerkki.**

$$\begin{aligned} (z_0, z_0, z_2, z_3) &= 1 \\ (z_0, z_1, z_2, \infty) &= \frac{z_0 - z_2}{z_1 - z_2} \\ (z_0, 1, 0, \infty) &= z_0 \end{aligned}$$

Haluamme tutkia, miten kaksoissuhteiden avulla voi muodostaa halutunlaisia Möbius-kuvauksia. Aloitamme erikoistapauksella:

**6.22 Apulause.** *Olkoot  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  eri pisteitä. Tällöin  $g(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$  on Möbius-kuvaus, joka vie pisteet  $z_1, z_2, z_3$  pisteille  $1, 0, \infty$  tässä järjestyksessä. Muuta Möbius-kuvauksia, joilla olisi tämä ominaisuus, ei ole.*

*Todistus.* Oletamme, että  $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ . Tällöin

$$g(z) = \frac{z - z_2}{z - z_3} : \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}.$$

Tästä nähdään suoraan, että  $g$  on Möbius-kuvaus ja  $g(z_1) = 1$ ,  $g(z_2) = 0$  sekä  $g(z_3) = \infty$ .

Yksikäsitteisyyden osoittamiseksi oletetaan, että  $h$  on Möbius-kuvaus, jolla on sama ominaisuus. Tällöin (edellisten lauseiden nojalla)  $g \circ h^{-1}$  on myös Möbius-kuvaus ja se pitää pisteet  $1, 0$  ja  $\infty$  paikoillaan. Kirjoitetaan

$$(g \circ h^{-1})(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Ehdosta  $(g \circ h^{-1})(0) = 0$  seuraa  $b = 0$ . Ehdosta  $(g \circ h^{-1})(\infty) = \infty$  puolestaan seuraa  $c = 0$ . Mutta tällöin ehdosta  $(g \circ h^{-1})(1) = 1$  seuraa  $a = d$ . Siten  $(g \circ h^{-1})(z) = z$  kaikilla  $z \in \overline{\mathbb{C}}$  eli  $h = g$ .  $\square$

Pystymme nyt ratkaisemaan seuraavan *kuvaustehtävän*: On annettu laajennetun tason pisteet  $z_1, z_2, z_3$  ja etsittävä Möbius-kuvaus, joka vie ne annetuille pisteille  $w_1, w_2, w_3$ .

**6.23 Lause.** *Olkoot  $z_1, z_2, z_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  eri pisteitä ja  $w_1, w_2, w_3 \in \overline{\mathbb{C}}$  niin ikään eri pisteitä. On olemassa yksikäsitteinen Möbius-kuvaus  $f$ , jolle pätee  $f(z_j) = w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Se saadaan yhtälön*

$$(w, w_1, w_2, w_3) = (z, z_1, z_2, z_3).$$

*ratkaisuna  $w = f(z)$ , kun  $z \in \overline{\mathbb{C}}$ .*

*Todistus.* Olkoon  $g(z) = (z, z_1, z_2, z_3)$  ja  $h(w) = (w, w_1, w_2, w_3)$ . Edellisestä apulauseesta seuraa, että  $h^{-1} \circ g$  on Möbius-kuvaus, joka vie pisteet  $z_1, z_2, z_3$  pisteille  $w_1, w_2, w_3$  tässä järjestyksessä. Tämä on väitetty  $f$ , sillä yhtälö  $h(w) = g(z)$  voidaan kirjoittaa yhtäpitävästi muodossa  $w = (h^{-1} \circ g)(z)$ . Yksikäsitteisyyden jätämme harjoitustehtäväksi.  $\square$

Lauseen 6.23 seurauksena nähdään, että kaksoissuhde on *invariantti* Möbius-kuvauksessa  $f$ :

$$(f(z_0), f(z_1), f(z_2), f(z_3)) = (z_0, z_1, z_2, z_3).$$

**6.24 Esimerkki.** a) Etsittävä se Möbius-kuvaus  $f$ , jolle  $f(0) = 1$ ,  $f(1) = 2$  ja  $f(2) = 3$ . Vastaus on ilmeinen:  $f(z) = z + 1$ . Katsotaan, kuinka tämä saadaan

kaksoisuhdetta käyttäen. Edellisen lauseen mukaan on ratkaistava yhtälö  $(w, 1, 2, 3) = (z, 0, 1, 2)$ , jossa

$$(w, 1, 2, 3) = \frac{w-2}{w-3} : \frac{1-2}{1-3} = \frac{w-2}{2(w-3)},$$

$$(z, 0, 1, 2) = \frac{z-2}{z-3} : \frac{0-1}{0-2} = \frac{z-1}{2(z-2)}.$$

Siis saadaan yhtälö  $(w-2)/(w-3) = (z-1)/(z-2)$ , josta helposti ratkeaa  $w = z+1$  kuten jo tiesimmekin.

b) Etsittävä se Möbius-kuvaus  $g$ , jolle  $g(-1) = -1$ ,  $g(1) = 1$  ja  $g(0) = i$ . Laskemme aluksi

$$(w, -1, 1, i) = \frac{w-1}{w-i} : \frac{-1-1}{-1-i} = \frac{(1+i)(w-1)}{2(w-i)},$$

$$(z, -1, 1, 0) = \frac{z-1}{z-0} : \frac{-1-1}{-1-0} = \frac{z-1}{2z}.$$

Yhtälö  $(w, -1, 1, i) = (z, -1, 1, 0)$  saa tästä muodon

$$(1+i) \frac{w-1}{w-i} = \frac{z-1}{z},$$

josta parin välivaiheen jälkeen saamme ratkaisuksi

$$w = g(z) = \frac{z+i}{iz+1}.$$

(Tarkista, että pisteet  $-1$ ,  $1$  ja  $0$  todella kuvautuvat halutulla tavalla!)

**6.25 Huomautus.** Esitetyn kuvaustehtävän voi ratkaista ilman kaksoisuhdettakin. Kirjoitetaan etsitty kuvaus muodossa  $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  ja pyritään määrittämään sopivat kertoimet  $a, b, c, d$  yhtälöistä  $f(z_j) = \frac{az_j+b}{cz_j+d} = w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Tämä on kätevää erityisesti silloin kun  $0$  ja  $\infty$  esiintyvät annettujen pisteiden joukossa.

### Möbius-ympyrät Möbius-kuvauksessa

Tutkimme seuraavaksi suorien ja ympyröiden kuvautumista Möbius-kuvauksessa. Tunnetusti kolme pistettä määrittävät joko ympyrän tai suoran tasossa: mikäli pisteet eivät ole samalla suoralla, niiden kautta kulkee täsmälleen yksi ympyrä. Kun työskentelemme laajennetussa kompleksitasossa, sisällytämme jokaiseen suoraan myös äärettömyyspisteen  $\infty$ . Kuten huomautuksessa 6.7 totesimme, Riemannin pallolla sekä suorat että ympyrät vastaavat ympyröitä. Nämä havainnot kertovat siitä, että laajennetussa kompleksitasossa ympyrät ja suorat ovat oikeastaan ekvivalentteja. Otammekin käyttöön seuraavan (epästandardin) nimityksen:

**6.26 Määritelmä.** *Möbius-ympyrä* laajennetussa kompleksitasossa  $\overline{\mathbb{C}}$  on joko  $\mathbb{C}$ :n ympyrä tai  $\mathbb{C}$ :n suoran ja äärettömyyspisteen yhdiste.

Tavoittemme on todistaa seuraava tulos:

**6.27 Lause.** Jos  $S \subset \overline{\mathbb{C}}$  on Möbius-ympyrä ja  $f$  on Möbius-kuvaus, niin  $f(S)$  on Möbius-ympyrä.

Aloitamme apulauseella, joka kertoo, miltä suorien ja ympyröiden yhtälöt näyttävät kompleksimuodossa.

**6.28 Apulause.** a) Jokaisella  $\mathbb{C}$ :n suoralla on yhtälö muotoa

$$\alpha z + \overline{\alpha} \bar{z} + c = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, c \in \mathbb{R}).$$

Kääntäen tällainen yhtälö aina esittää  $\mathbb{C}$ :n suoraa.

b) Jokaisella  $\mathbb{C}$ :n ympyrällä on yhtälö muotoa

$$z\bar{z} + \alpha z + \overline{\alpha} \bar{z} + c = 0 \quad (\alpha \in \mathbb{C}, c \in \mathbb{R}, |\alpha|^2 > c).$$

Kääntäen tällainen yhtälö aina esittää  $\mathbb{C}$ :n ympyrää.

*Todistus.* a) Suoran yhtälö on tunnetusti reaalisiin merkinnöihin muotoa  $ax + by + c = 0$ , jossa  $a, b, c \in \mathbb{R}$  ja ainakin toinen kertoimista  $a$  ja  $b$  on  $\neq 0$ . Kun sijoitetaan tähän  $z = x + iy$  eli  $x = (z + \bar{z})/2$  ja  $y = (z - \bar{z})/2i$  saadaan yhtäpitävä yhtälö

$$\frac{1}{2}(a - ib)z + \frac{1}{2}(a + ib)\bar{z} + c = 0,$$

joka on juuri haluttua muotoa.

b) Tarkastellaan ympyrää, jonka keskipiste on  $z_0 \in \mathbb{C}$  ja säde  $r > 0$ . Sen yhtälö on siis  $|z - z_0| = r$ . Korottamalla puolittain toiseen saamme yhtälön  $(z - z_0)(\overline{z - z_0}) = r^2$  eli

$$z\bar{z} - z\bar{z}_0 - \bar{z}z_0 + z_0\bar{z}_0 - r^2 = 0.$$

Tämä tulee haluttuun muotoon, kun merkitään  $\alpha = -\bar{z}_0$  ja  $c = z_0\bar{z}_0 - r^2 = |\alpha|^2 - r^2$ . Huomaa, että tässä  $|\alpha|^2 > c$ . □

*Lauseen 6.27 todistus.* Esimerkin 6.17 Möbius-kuvauksista siirrot, homotetiat ja kierrot selvästikin kuvaavat suorat suorille ja ympyrät ympyröille. Yleisesti tämä pätee kaikille affineille kuvauksille  $z \mapsto az + b$ . Koska jokainen Möbius-kuvaus voidaan esittää yhdisteenä tällaisista kuvauksista ja inversioista  $z \mapsto 1/z$ , riittää, että todistamme lauseen siinä tapauksessa, että  $f$  on inversio:  $f(z) = 1/z$ .

Oletetaan, että Möbius-ympyrän  $S$  yhtälö on

$$qz\bar{z} + \alpha z + \overline{\alpha} \bar{z} + c = 0,$$

jossa  $q = 0$  (suora) tai  $q = 1$  (ympyrä) ja  $\alpha \in \mathbb{C}$  ja  $c \in \mathbb{R}$  ovat kuten apulauseessa edellä. Nyt  $w \in f(S) \Leftrightarrow 1/w = f^{-1}(w) \in S \Leftrightarrow$

$$qw^{-1}\bar{w}^{-1} + \alpha w + \overline{\alpha} \bar{w}^{-1} + c = 0 \quad \Leftrightarrow \quad cw\bar{w} + \overline{\alpha} w + \alpha \bar{w} + q = 0.$$

Jos  $c = 0$  (eli  $0 \in S$ ), tämä saa muodon  $\overline{\alpha} w + \alpha \bar{w} + q = 0$ , joka on suora. On huomattava, että myös  $\infty \in f(S)$ , koska  $0 \in S$ . Jos taas  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , voidaan yo. yhtälö saattaa muotoon

$$w\bar{w} + \overline{(\alpha/c)}w + (\alpha/c)\bar{w} + q/c = 0,$$

joka on ympyrä. □

Jos halutaan selvittää konkreettisesti, mikä on annetun Möbius-ympyrän  $S$  kuva annetussa Möbius-kuvauksessa  $f$ , voidaan nyt menetellä seuraavasti: valitaan kolme  $S$ :n pistettä, lasketaan niiden kuvat  $f$ :ssä ja määritetään näiden kuvapisteiden kautta kulkeva Möbius-ympyrä.

Jos kääntäen halutaan muodostaa Möbius-kuvaus, joka vie annetun Möbius-ympyrän  $S$  toiselle annetulle Möbius-ympyrälle  $S'$ , valitaan kolme pistettä  $z_1, z_2, z_3 \in S$  ja samoin kolme pistettä  $w_1, w_2, w_3 \in S'$  sekä etsitään aikaisemmin opitulla tavalla (esim. Lauseen 6.23 avulla) Möbius-kuvaus  $f$ , jolle  $f(z_j) = w_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ). Tällöin Lauseen 6.27 nojalla välttämättä  $f(S) = S'$ .

**6.29 Esimerkki.** Selvitetään, mikä on yksikköympyrän  $S^1 = \{z : |z| = 1\}$  kuva kuvauksessa

$$f(z) = \frac{z+i}{iz+1}.$$

Pisteen  $i \in S^1$  kuva on  $\infty$ , joten kuva on suora. Piste  $1 \in S^1$  kuvautuu pisteelle  $1$  ja  $-1 \in S^1$  pisteelle  $-1$ , joten kyseinen suora on reaaliakseli.

### Alueiden konformikuvaustehtäviä

Tarkastelemme nyt joitakin erikoistapauksia – erityisesti Möbius-kuvausten avulla ratkeavia – seuraavasta yleisestä *konformikuvaustehtävästä*:

On annettu alueet  $A$  ja  $A'$  laajennetussa kompleksitasossa. On selvitettävä, onko olemassa **konforminen bijektio**  $A \rightarrow A'$ . Jos on, on pyrittävä esittämään sellainen mahdollisimman konkreettisesti.

Palautetaan tässä mieleen (ks. luvun 2 loppu), että joukko  $A$  on alue jos ja vain jos se on avoin ja (polku)yhtenäinen.

Olkoon  $S \subset \overline{\mathbb{C}}$  jokin Möbius-ympyrä. Tällöin  $S$  jakaa  $\overline{\mathbb{C}}$ :n kahteen alueeseen: avoimella joukolla  $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$  on nimittäin kaksi yhtenäistä komponenttia, joiden kummankin reuna laajennetussa tasossa on  $S$ . Olkoot nämä komponentit  $A_1$  ja  $A_2$ . Mikäli  $S$  on suora, kumpikin näistä on

i) avoin puolitaso,

ja mikäli  $S$  on ympyrä, kyseessä ovat

ii) avoin kiekko  $D(a, r)$  sopivilla  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  ja

iii) ”ympyrän ulkopuoli” sekä äärettömyyspiste, ts. joukko muotoa  $\overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(a, r)$ .

Riemannin pallolla kaikki nämä aluetyypit vastaavat ympyräkalotteja; erityisesti ne ovat keskenään homeomorfisia.

Oletetaan sitten, että  $S$  ja  $S'$  ovat molemmat Möbius-ympyröitä. Yllä kuvatulla tavalla  $S$  jakaa laajennetun tason alueisiin  $A_1$  ja  $A_2$ , ja  $S'$  puolestaan alueisiin  $A'_1$  ja  $A'_2$ . Kuten edellisessä jaksossa opimme, on aina mahdollista esim. kaksoissuhteiden avulla muodostaa Möbius-kuvaus  $f$ , jolle  $f(S) = S'$ . Lauseen 6.15 nojalla  $f$  on laajennetun tason konforminen bijektio itselleen ja erityisesti homeomorfismi (ts.  $f$

ja  $f^{-1}$  ovat jatkuvia). Tästä seuraa, että se säilyttää myös komponenttirakenteen: pätee joko  $f(A_1) = A'_1$  ja  $f(A_2) = A'_2$  tai sitten  $f(A_1) = A'_2$  ja  $f(A_2) = A'_1$ . (Yhtenäisyyden osalta ks. erityisesti lause 2.26). Tässä aluetyypit i-iii saattavat hyvinkin kuvautua toisikseen.

**6.30 Esimerkki.** Inversio  $z \mapsto 1/z$  kuvaa yksikköympyrän  $S^1 = \{z : |z| = 1\}$  itselleen mutta vaihtaa sen ”sisäpuolen”  $D(0, 1)$  ja ”ulkopuolen”  $D(\infty, 1) = \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{D}(0, 1)$  keskenään.

Yksittäistapauksessa voi komponenttien vastaavuuden tutkia ottamalla jonkin testipisteen  $z \in A_1$  ja katsomalla, onko sen kuva  $f(z)$  alueessa  $A'_1$  vai  $A'_2$ . Joskus tämä on kuitenkin epätydyttävää, esim. silloin jos haluamme jo etukäteen kuvausta  $f$  konstruoidaessa varmistua siitä, että vaikkapa alue  $A_1$  kuvautuu alueelle  $A'_1$ .

Tässä tilanteessa voi käyttää seuraavaa havainnollista kriteeriä, jossa Möbius-ympyrä suunnistetaan kolmen pisteen avulla ja identifioidaan sen rajaamat kaksi aluetta suunnistuksen perusteella:

**6.31 Lause.** *Olkoon  $S \subset \overline{\mathbb{C}}$  Möbius-ympyrä ja  $z_1, z_2, z_3 \in S$  eri pisteitä. Tällöin*

$$S = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : (z, z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}\}$$

ja joukon  $\overline{\mathbb{C}} \setminus S$  komponentit ovat

$$A_1 = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) < 0\},$$

$$A_2 = \{z \in \overline{\mathbb{C}} : \text{Im}(z, z_1, z_2, z_3) > 0\}.$$

*Havainnollisesti nämä voidaan tunnistaa seuraavasti: kun  $S$ :ää kuljetaan  $z_1$ :stä lähtien  $z_2$ :n kautta  $z_3$ :een,  $A_1$  jää vasemmalle ja  $A_2$  oikealle.*

*Todistus.* Käyttämällä lausetta 6.23 voimme olettaa, että  $z_1 = 1$ ,  $z_2 = 0$  ja  $z_3 = \infty$ , jolloin  $S = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Tällöin  $(z, z_1, z_2, z_3) = z$ , joten  $A_1 = \{z : \text{Im } z < 0\}$  on alempi puolitaso ja  $A_2 = \{z : \text{Im } z > 0\}$  on ylempi puolitaso. Lisäksi järjestys  $1, 0, \infty$  merkitsee, että  $S$ :ää kuljetaan oikealta vasemmalle, jolloin  $A_1$  jää vasemmalle ja  $A_2$  oikealle kuten pitääkin.  $\square$

Koska kaksoissuhde on invariantti Möbius-kuvauksessa  $f$ , tästä lauseesta seuraa, että jos Möbius-ympyrä  $S$  suunnistetaan pisteiden  $z_1, z_2, z_3$  osoittamalla tavalla ja  $f(S) = S'$  vastaavasti pisteiden  $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$  osoittamalla tavalla, niin  $S$ :n vasemmalle puolelle jäävä alue kuvautuu  $S'$ :n vasemmanpuoliselle alueelle ja sama pätee oikeanpuolisille alueille.

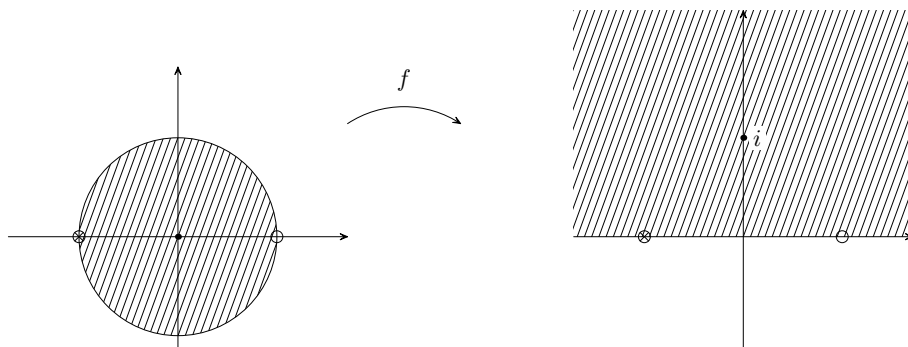
**6.32 Esimerkki.** Olkoon  $f$  esimerkissä 6.29 käsitelty Möbius-kuvaus,

$$f(z) = \frac{z+i}{iz+1}.$$

Tiedämme jo, että se kuvaa yksikköympyrän reaaliakselille. Näin ollen yksikkökiekon  $D(0, 1)$  kuva on ylempi tai alempi puolitaso. Koska  $f(0) = i$ , kyseessä on ylempi puolitaso  $\mathbb{H} = \{z : \text{Im } z > 0\}$ . Tämän voi nähdä jo siitä, että esimerkin 6.29 mukaan reunapisteille pätee  $f(i) = \infty$ ,  $f(1) = 1$  ja  $f(-1) = -1$ . Kun nimittäin yksikköympyrää



kierretään pisteiden  $i, 1, -1$  määräämään suuntaan eli myötäpäivään, yksikkökierro jää oikealle; vastaavasti ylempi puolitaso  $\mathbb{H}$  jää oikealle, kun reaaliakselia kuljetaan pisteiden  $\infty, 1, -1$  määräämään suuntaan eli oikealta vasemmalle.

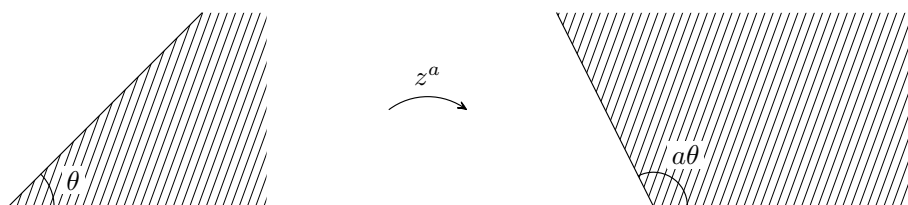


Möbius-kuvausten ohella voimme käyttää konformikuvaustehtävissä myös muita aikaisemmin opittuja funktioita. Tarkastelemme tässä lyhyesti potenssi- ja juurifunktioiden sekä eksponenttifunktion käyttöä.

*Potenssi- ja juurifunktiot.* Näitä voi käyttää kuvattaessa origosta lähtevä sektori puolitasolle tai päinvastoin. Jos esimerkiksi  $k > 1$  on kokonaisluku, niin  $z \mapsto z^k$  vie sektorin  $\{z : 0 < \arg z < \pi/k\}$  konformisesti ja bijektiivisesti ylemmälle puolitasolle  $\mathbb{H} = \{z : \text{Im } z > 0\}$ . Juuren  $z \mapsto z^{1/k}$  päähaara (ks. luvun 3 loppu) toimii päinvastoin.

Yleisemmin: Jos  $a, \theta > 0$  ovat sellaisia, että  $\theta < \pi$  ja  $a\theta < \pi$ , niin potenssifunktio  $z \mapsto z^a$  (päähaara) on konforminen bijektio sektorilta  $\{z : 0 < \arg z < \theta\}$  sektorille  $\{w : 0 < \arg w < a\theta\}$ . Palautetaan mieleen, että napaesityksessä tämä kuvaus voidaan kirjoittaa

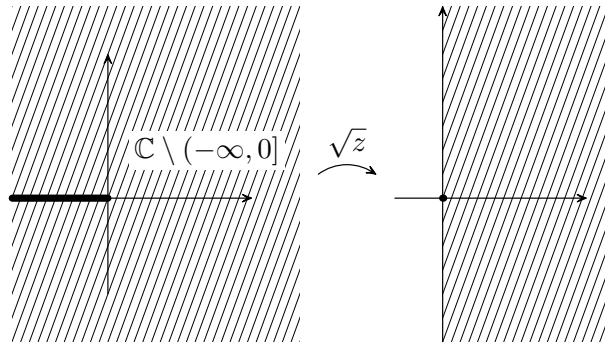
$$re^{i\varphi} \mapsto r^a e^{ia\varphi}, \quad \text{kun } |\varphi| < \pi.$$



Samoin tämä kuvaus myös kuvaa sektorin  $\{z : |\arg z| < \theta\}$  konformisesti sektorille  $\{w : |\arg w| < a\theta\}$ .

**6.33 Esimerkki.** Tehtävänä on etsiä jokin konformikuvaus negatiivista reaaliakselia pitkin aukileikatulta tasolta  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  yksikkökierroille  $D(0, 1)$ .

Aloitetaan kuvaamalla  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] = \{z : |\arg z| < \pi\}$  oikealle puolitasolle  $H = \{w : \text{Re } w > 0\} = \{w : |\arg w| < \pi/2\}$ . Tämä voidaan tehdä neliöjuuren päähaaralla  $z \mapsto \sqrt{z}$ :



Seuraavaksi meidän on kuvattava  $H$  konformisesti yksikkökielelle; tehdään tämä sopivalla Möbius-kuvauksella  $g$ . Eräs tällainen saadaan ehdoista  $g(0) = -1$ ,  $g(i) = i$  ja  $g(\infty) = 1$ , sillä  $0, i, \infty$  ovat imaginaariakselin pisteitä ja oikea puolitaso jää niiden mukaan suunnistetun imaginaariakselin oikealle puolelle, kun taas  $-1, i, 1$  ovat yksikköympyrän pisteitä ja yksikkökieko jää niiden mukaan suunnistetun ympyränkehän oikealle puolelle. Tämä  $g$  voidaan ratkaista kaksoisuhdeytälöstä

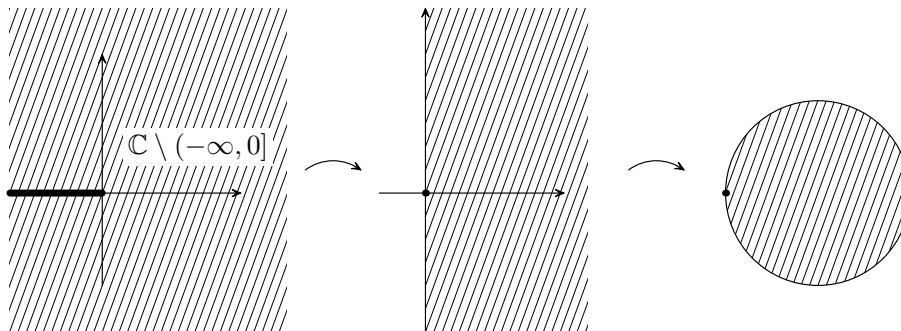
$$(g(z), -1, i, 1) = (z, 0, i, \infty),$$

josta saadaan (harjoitustehtävä)

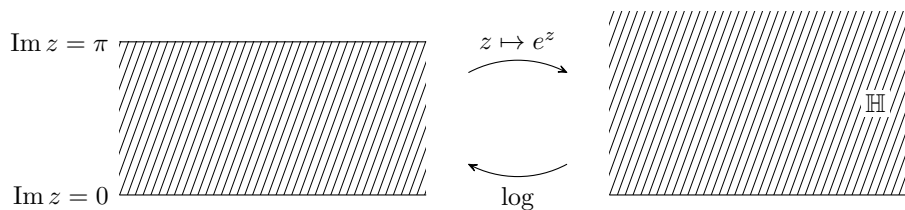
$$g(z) = \frac{z-1}{z+1}.$$

Yhdistämällä saadaan halutunlainen konformikuvaus  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \rightarrow D(0, 1)$ :

$$z \mapsto \sqrt{z} \mapsto \frac{\sqrt{z}-1}{\sqrt{z}+1}.$$



*Eksponenttifunktio.* Eksponenttifunktiolla voidaan kuvata vaakasuora vyö konformisesti puolitasolle tai sektorille. Esimerkiksi vyö  $\{z : 0 < \text{Im } z < \pi\}$  kuvautuu konformisesti ylemmälle puolitasolle  $\mathbb{H}$ .



Logaritmi toimii vastakkaiseen suuntaan kuin eksponenttikuvaus: sen haaralla voi kuvata tason sektorin aina vaakasuoralle vyölle. (Selvitä itsellesi nämä eksponenttifunktiota ja logaritmia koskevat väitteet harjoitustehtävänä.)

**6.34 Huomautus.** Mainitsemme lisätietona seuraavan yleisen tuloksen: Jos  $A$  ja  $A'$  ovat sellaisia alueita  $\overline{\mathbb{C}}$ :ssä, että kummankin komplementti sisältää ainakin kaksi pistettä (ts. kumpikaan ei ole  $\overline{\mathbb{C}}$  tai esimerkiksi  $\mathbb{C}$ ) ja ne ovat topologisesti *yhdesti yhtenäisiä*, niin on olemassa konforminen bijektio  $A \rightarrow A'$ . Siis tällainen alue on aina ”konformisesti ekvivalentti” esimerkiksi yksikkökiekon kanssa! Tämä tulos on nimeltään *Riemannin kuvauslause*, joka usein todistetaan kurssilla Kompleksianalyysi II.

## 7 Kompleksinen integrointi

Vektorianalyysin kurssilta muistamme, että on olemassa useita tapoja integroida tason funktioita: on sekä pintaintegraalit että integroinnit polkuja pitkin. Periaatteessa analyyttisiin funktioihin voisi soveltaa molempia menetelmiä, mutta käytännössä on osoittautunut, että vain jälkimmäiset tuovat todella uusia piirteitä ja tehokkaita menetelmiä analyyttisten funktioiden teoriaan. Siksi tällä kurssilla käsittelemme vain integrointia polkujen yli.

Aloitamme määrittelemällä jatkuvan funktion integraalin kompleksitason jatkuvasti derivoituvan polun yli. Riippuen siitä, otammeko huomioon polun kulloisenkin suunnan vai emme, saamme kaksi vaihtoehtoista integraalin käsitettä: polkuintegraalin ja integraalin kaarenpituuden suhteen. Molemmat ovat luonnollisia yleistyskiä tavallisesta Riemann-integraalista. Kun olemme tutkineet niiden perusominaisuuksia, todistamme kurssin ehkä tärkeimman tuloksen, Cauchyn integraalilauseen – aluksi tosin vain umpinaisille poluille kiekkoissa. Lause sanoo, että analyttisen funktion integraali yli jokaisen umpinaisen polun häviää. Lähes välitön seuraus tästä on Cauchyn integraalikaava, joka kertoo analyttisen funktion arvot kiekon sisäpisteissä sen reunarvojen avulla. Seuraavassa luvussa todistamme tämän avulla muutamia merkittäviä analyttisten funktioiden ominaisuuksia.

### Polkuintegraali

Jos  $g = u + iv$  on jatkuva kompleksiarvoinen funktio, joka on määritelty suljetulla reaaliakselin välillä  $[a, b]$ , on luonnollista asettaa

$$(7.1) \quad \int_a^b g(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt.$$

Tarkastellaan sitten kompleksitason polkujen yli laskettavia integraaleja. (Lukijan on tässä vaiheessa hyvä palauttaa mieleen polun määritelmä ja muita polkuihin liittyviä käsitteitä luvun 2 lopusta ja luvun 6 alusta.)

**7.2 Määritelmä.** Olkoon  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  jatkuvasti derivoituva (eli lyhyesti  $C^1$ ) polku joukossa  $A \subset \mathbb{C}$ . Jos  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  on jatkuva, niin  $f$ :n *integraali yli polun*  $\gamma$  on

$$\int_{\gamma} f dz = \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Koska integroitava lauseke on oletettu jatkuvaksi, integraali on hyvin määritelty esimerkiksi Riemann-integraalina. Verrattuna kaavaan (7.1) ideana on siis käyttää  $f$ :n

arvoja polun  $\gamma$  pisteissä  $\gamma(t)$  ja korvata reaaliakselin suuntainen ”infinitesimaalinen lisäys”  $dt$  polun  $\gamma$  suuntaisella ”infinitesimaalisella lisäyksellä”  $d\gamma(t) = \gamma'(t) dt$ . Integraalin merkinnässä tähän viittaa siis ”kompleksinen differentiaalelementti”  $dz$ .

Selvästikin määrittelemämme polkuintegraali on *lineaarinen* integroitavan funktion suhteen: jos  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$  ja  $f, g$  ovat jatkuvia, niin

$$\int_{\gamma} (\alpha f + \beta g) dz = \alpha \int_{\gamma} f dz + \beta \int_{\gamma} g dz.$$

Integraalin  $\int_{\gamma} f dz$  arvo ei muutu, jos polku  $\gamma$  *uudelleenparametroidaan* siten, että sen suunnistus säilyy. Olkoon nimittäin  $\gamma$  kuten määritelmässä edellä ja  $\eta: [c, d] \rightarrow [a, b]$  jokin aidosti kasvava jatkuvasti derivoituva bijektio. Tällöin uudelleenparametroidulla polulla  $\gamma \circ \eta$  on sama alkupiste ja sama loppupiste kuin  $\gamma$ :lla, koska  $\eta(c) = a$  ja  $\eta(d) = b$ . Tekemällä integraalissa muuttujanvaihto  $t = \eta(s)$  saamme

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f dz &= \int_a^b f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt \\ &= \int_c^d f(\gamma(\eta(s))) \gamma'(\eta(s)) \eta'(s) ds = \int_{\gamma \circ \eta} f dz, \end{aligned}$$

sillä ketjusäännön nojalla  $(\gamma \circ \eta)'(s) = \gamma'(\eta(s)) \eta'(s)$ . Voimme siis halutessamme käyttää parametrivälinä esimerkiksi standardiväliä  $I = [0, 1]$  (yksikköväli); tähän päästään uudelleenparametroidulla  $\eta(s) = a + s(b - a)$  ( $s \in I$ ).

**7.3 Huomautus.** Edellisen havainnon johdosta saatamme puhua jatkossa esimerkiksi sellaisista polkuintegraaleista kuin

$$\int_{z_1}^{z_2} f dz = \int_{[z_1, z_2]} f dz \quad \text{ja} \quad \int_{\partial D(z_0, r)} f dz,$$

jossa  $[z_1, z_2]$  on jana pisteestä  $z_1 \in \mathbb{C}$  pisteeseen  $z_2 \in \mathbb{C}$  ja  $\partial D(z_0, r)$  on  $z_0$ -keskisen ja  $r$ -säteisen ympyrän kehä suunnistettuna positiivisesti (eli vastapäivään). Merkinnässä ei siis oteta kantaa parametrintiin. Suunnanmukainen  $C^1$ -parametrinti voidaan tehdä monella tavalla; esimerkiksi  $\gamma(t) = z_1 + t(z_2 - z_1)$  ( $t \in I$ ) janalle ja  $\gamma(t) = z_0 + re^{2\pi it}$  ( $t \in I$ ) ympyrälle.

Polun *suunnistuksen kääntäminen* muuttaa polkuintegraalin arvon vastaluvukseen. Jos esimerkiksi  $\gamma: I \rightarrow A$  on  $C^1$  polku, voimme määritellä sen *vastapolun*

$$\gamma^{-1}(t) = \gamma(1 - t), \quad t \in I.$$

(Huomaa, että merkinnästä huolimatta tässä ei ole kysymys käänteisfunktioista!) Tässä siis  $\gamma$  ja  $\gamma^{-1}$  määrittelevät saman käyrän tasossa mutta alkupiste ja loppupiste vaihtuvat keskenään. Tällöin käyttämällä muuttujanvaihtoa  $s = 1 - t$ , jossa  $ds = -dt$ , saamme

$$\begin{aligned} \int_{\gamma^{-1}} f dz &= \int_0^1 f(\gamma(1 - t)) (-\gamma'(1 - t)) dt \\ &= \int_1^0 f(\gamma(s)) \gamma'(s) ds = - \int_{\gamma} f dz. \end{aligned}$$

Viimeinen etumerkin vaihtuminen seurasi siitä, että vaihdoimme muuttujanvaihdosta tulleet integroimisrajat 1 ja 0 takaisin normaaliin järjestykseen.

**7.4 Esimerkki.** a) Olkoon  $\gamma(t) = t$ , kun  $0 \leq t \leq 1$ . Tällöin  $\gamma'(t) = 1$ , joten

$$\int_{\gamma} f dz = \int_0^1 f(t) dt.$$

Siis  $\mathbb{R}$ :n välin yli otettu polkuintegraali on tavallinen Riemann-integraali.

b) Olkoon  $\gamma$  positiivisesti suunnistetun yksikköympyrän kehän parametrisointi  $\gamma(t) = e^{2\pi it}$ , jossa  $0 \leq t \leq 1$ . Tällöin  $\gamma'(t) = 2\pi i e^{2\pi it}$ . Olkoon  $n$  kokonaisluku. Nyt

$$\int_{\gamma} z^n dz = \int_0^1 (e^{2\pi it})^n 2\pi i e^{2\pi it} dt = 2\pi i \int_0^1 e^{2(n+1)\pi it} dt = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$$

Tulemme myöhemmin näkemään, miksi tässä arvo  $n = -1$  eli funktio  $1/z$  on erikois-asemassa.

c) Olkoon  $\gamma$  kuten edellisessä kohdassa, ja valitaan integroitavaksi funktio  $\bar{z}$ . Koska  $\overline{\gamma(t)} = e^{-2\pi it} = 1/\gamma(t)$ , saamme itse asiassa saman tuloksen kuin edellä arvolla  $n = -1$ :

$$\int_{\gamma} \bar{z} dz = 2\pi i \int_0^1 dt = 2\pi i.$$

Huomaa, että  $\bar{z}$ :n integraali yli yksikköympyrän eroaa ratkaisevasti vastaavasta  $z$ :n integraalista, joka oli 0.

Polkuintegraalin käsite voidaan helposti ulottaa sellaisiin polkuihin, jotka ovat jatkuvasti derivoituvia äärellistä pistejoukkoa lukuunottamatta.

**7.5 Määritelmä.** Polku  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ , jossa  $A \subset \mathbb{C}$ , on *paloittain*  $C^1$ , jos voidaan kirjoittaa

$$[a, b] = [a_0, a_1] \cup [a_1, a_2] \cup \dots \cup [a_{n-1}, a_n],$$

jossa  $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ , ja rajoittumat  $\gamma_k = \gamma|_{[a_{k-1}, a_k]}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) ovat kaikki  $C^1$ -funktioita. Tällöin polkuintegraali yli  $\gamma$ :n on

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f dz.$$

Tässä määritelmässä siis  $\gamma$  on jatkuva pisteissä  $a_k$  ja toispuoliset derivaatat  $\gamma'(a_k-)$  sekä  $\gamma'(a_k+)$  ovat olemassa mutta ne voivat olla erisuuret. Tämän yleistyksen jälkeen voimme puhua esimerkiksi polkuintegraaleista, jotka on otettu jonkin murtoviivan kuten vaikkapa monikulmion (suunnistetun) reunan yli.

Saman idean mukaisesti voimme ottaa käyttöön myös polkujen tulon käsitteen. Jos  $\gamma_1: [a, b] \rightarrow A$  ja  $\gamma_2: [c, d] \rightarrow A$  ovat (paloittain)  $C^1$  polkuja siten, että  $\gamma_1$ :n loppupiste on sama kuin  $\gamma_2$ :n alkupiste eli  $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$ , niin näiden *tulo* on polku  $\gamma_1 * \gamma_2: [a, b + (d - c)] \rightarrow A$ ,

$$(\gamma_1 * \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t), & a \leq t \leq b, \\ \gamma_2(c - b + t), & b \leq t \leq b + (d - c). \end{cases}$$

Tämä on paloittain  $C^1$  polku, joka yhdistää pisteen  $\gamma_1(a)$  pisteeseen  $\gamma_2(d)$ . Polku-integraali tulopolun yli on selvästikin additiivinen:

$$\int_{\gamma_1 * \gamma_2} f dz = \int_{\gamma_1} f dz + \int_{\gamma_2} f dz.$$

Yleisemmin voimme tietysti määritellä useamman polun tulon  $\gamma_1 * \dots * \gamma_n$ . Itse asiassa yllä määritelmässä 7.5 oli tilanne, jossa  $\gamma = \gamma_1 * \dots * \gamma_n$ .

### Integraali kaarenpituuden suhteen

Tason polun yli voidaan määritellä myös toinen luonnollinen integraali.

**7.6 Määritelmä.** Olkoon  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  jokin  $C^1$  polku joukossa  $A \subset \mathbb{C}$ . Jos  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  on jatkuva funktio, niin  $f$ :n *integraali  $\gamma$ :n kaarenpituuden suhteen* on

$$\int_{\gamma} f |dz| = \int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| dt.$$

Tässä siis ”kompleksisen lisäyksen”  $dz = d\gamma(t)$  (määritelmä 7.2) sijasta käytetään ”pituuselementtiä”  $|dz| = |d\gamma(t)| = |\gamma'(t)| dt$ , joka ottaa huomioon pisteen  $\gamma(t)$  modulin muutoksen pitkin kyseistä polkua. Tapauksessa, jossa  $f \geq 0$ , voidaan havainnollisesti tulkita, että integraalin  $\int_{\gamma} f |dz|$  arvo on sellaisen polkua  $\gamma$  pitkin kulkevan aidan pinta-ala, jonka korkeus pisteessä  $\gamma(t)$  on  $f(\gamma(t))$ . Eryityisesti valitsemalla  $f \equiv 1$  saadaan

$$(7.7) \quad \int_{\gamma} |dz| = \int_a^b |\gamma'(t)| dt = \gamma\text{:n pituus.}$$

Myös kaarenpituuden suhteen laskettu integraali on lineaarinen integroitavan  $f$  suhteen, ja määritelmä voidaan laajentaa paloittain  $C^1$  poluille samoin kuin tehtiin määritelmässä 7.5. Erona tavalliseen polkuintegraaliin on kuitenkin se, että kaarenpituuden suhteen lasketun integraalin arvo ei muutu, jos polun suunnistus käännetään vastakkaiseksi (totea tämä harjoitustehtävänä).

**7.8 Esimerkki.** Olkoon  $f$  jatkuva funktio yksikköympyrällä  $\partial D(0, 1)$ . Tällöin

$$\int_{\partial D(0,1)} f(z) |dz| = 2\pi \int_0^1 f(e^{2\pi it}) dt = \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt.$$

Keskimmäinen integraali vastaa yksikköympyrän parametrisointia  $\gamma_1(t) = e^{2\pi it}$  ( $0 \leq t \leq 1$ ), jolle  $\gamma_1'(t) = 2\pi i e^{2\pi it}$  ja viimeinen parametrisointia  $\gamma_2(t) = e^{it}$  ( $0 \leq t \leq 2\pi$ ). Jälkimmäinen parametrisointi on *pituustarkka* siinä mielessä, että aina kun  $0 \leq a < b \leq 2\pi$ , niin rajoittuman (eli osapolun)  $\gamma_2|[a, b]$  pituus on sama kuin sitä vastaavan parametrivälin eli  $b - a$ .

Integraali kaarenpituuden suhteen ei ole funktioteoriassa ollenkaan niin tärkeä kuin aikaisemmin määritelty kompleksinen polkuintegraali. Lähinnä se tulee käyttöön arvioitaessa polkuintegraalin suuruutta. Perusperiaatteena tässä on seuraava tulos, jonka todistus on harjoitustehtävänä.

**7.9 Apulause.** Jos  $\gamma$  on paloittain  $C^1$  polku ja  $f$  on  $\gamma$ :n pisteissä jatkuva kompleksiarvoinen funktio, jolle  $|f| \leq M$  kaikissa  $\gamma$ :n pisteissä, niin

$$\left| \int_{\gamma} f dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \leq M \cdot \gamma\text{:n pituus.}$$

### Integraalifunktio

Ryhdyimme nyt tutkimaan tarkemmin analyyttisyyden ja integroinnin suhdetta.

**7.10 Määritelmä.** Jos  $A \subset \mathbb{C}$  on avoin ja  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ , niin analyyttinen funktio  $F: A \rightarrow \mathbb{C}$  on  $f$ :n *integraalifunktio*, mikäli

$$F'(z) = f(z) \quad \text{kaikilla } z \in A.$$

**7.11 Esimerkki.** Kun  $n \neq -1$  on kokonaisluku, niin funktiolla  $z^n$  on integraalifunktio  $z^{n+1}/(n+1)$  koko  $\mathbb{C}$ :ssä (jos  $n \geq 0$ ) tai alueessa  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  (jos  $n \leq -2$ ). Tapausta  $n = -1$  tarkastelemme kohta.

Jos integraalifunktio on olemassa, polkuintegraalien laskeminen käy varsin helpoksi. Erityisesti polkuintegraalin arvo riippuu vain polun päätepisteistä!

**7.12 Apulause.** Oletetaan, että jatkuvalla funktiolla  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  on integraalifunktio  $F$ . Silloin

$$\int_{\gamma} f dz = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

jokaisella paloittain  $C^1$  polulla  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$ .

*Todistus.* Oletetaan aluksi, että  $\gamma$  on jatkuvasti derivoituva eli  $C^1$ . Koska  $F' = f$ , niin ketjusäännön nojalla  $(F \circ \gamma)'(t) = f(\gamma(t))\gamma'(t)$ , joten analyyttisen peruslauseen mukaan (viime kädessä sovellettuna erikseen integroitavan reaali- ja imaginaariosaan)

$$\int_{\gamma} f dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt = \int_a^b (F \circ \gamma)'(t) dt = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

Jos  $\gamma$  on vain paloittain  $C^1$ , pilkomme sen  $C^1$  osapolkujen tuloksi  $\gamma_1 * \dots * \gamma_n$  kuten määritelmässä 7.5. Soveltamalla todistuksen alkuosaa kuhunkin näistä saamme

$$\int_{\gamma} f dz = \sum_{k=1}^n \int_{\gamma_k} f dz = \sum_{k=1}^n [F(\gamma(a_k)) - F(\gamma(a_{k-1}))] = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$

□

Tästä saadaan helposti seuraava yksikäsitteisyystulos *alueessa* määritellyille analyyttisille funktioille. (Tämän voisi päätellä myös aikaisemmin esillä olleesta lauseesta 3.19.)

**7.13 Seuraus.** Olkoon  $A \subset \mathbb{C}$  alue.

a) Analyyttinen funktio  $F: A \rightarrow \mathbb{C}$  on vakio jos ja vain jos  $F' = 0$   $A$ :ssa.

b) Jos  $F$  ja  $G$  ovat kumpikin funktion  $f$  integraalifunktioita  $A$ :ssa, niin  $F - G$  on vakio.



*Todistus.* a) Selvästikin vakiofunktion derivaatta on identtisesti nolla. Oletetaan siten, että  $F' = 0$   $A$ :ssa, ja osoitetaan, että  $F$  on vakio. Olkoot  $z, w \in A$  mielivaltaisia pisteitä. Palautetaan mieleen lauseesta 2.23, että koska  $A$  on avoin ja yhtenäinen,  $z$  voidaan yhdistää  $w$ :hen murtoviivalla  $A$ :ssa. Murtoviiva on selvästikin parametroitavissa paloittain  $C^1$  polulla (itse asiassa tulona janapoluista)  $\gamma$ . Äskeisen apulauseen nojalla on siten  $F(w) - F(z) = \int_{\gamma} 0 dz = 0$ . Koska  $z$  ja  $w$  olivat mielivaltaisia, päättelemme, että  $F$  on vakio.

b) Sovelletaan äskeitä päättelyä erotukseen  $F-G$ , jolle  $(F-G)' = F'-G' = 0$ .  $\square$

Tässä vaiheessa herää kysymys: Millaisilla funktioilla ylipäätään on integraalifunktio annetussa kompleksitason alueessa? Onko analyyttisellä funktiolla aina integraalifunktio määrittelyjoukossaan? Onko esimerkiksi funktiolla  $1/z$  integraalifunktio punkteeratussa tasossa  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ?

Aloitamme tämän tärkeän asian tutkimisen toteamalla, että integraalifunktion olemassaolo voidaan luonnehtia funktion polkuintegraalien avulla. Palautetaan tässä mieleen, että polku  $\gamma: [a, b] \rightarrow A$  on *umpinainen*, mikäli sen alku- ja loppupiste yhtyvät eli  $\gamma(a) = \gamma(b)$ .

**7.14 Lause.** *Olkoon  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  jatkuva alueessa  $A \subset \mathbb{C}$ . Tällöin  $f$ :llä on integraalifunktio  $A$ :ssa jos ja vain jos jokaisella umpinaisella paloittain  $C^1$  polulla  $\gamma$  alueessa  $A$  pätee  $\int_{\gamma} f dz = 0$ .*

*Todistus.* Ehdon välttämättömyys on jo oikeastaan todistettu apulauseessa 7.12: jos integraalifunktio on olemassa ja polku  $\gamma$  on umpinainen, niin selvästi  $\int_{\gamma} f dz = 0$ .

Oletetaan sitten, että  $f$ :n integraali yli jokaisen umpinaisen paloittain  $C^1$  polun häviää. Haluamme osoittaa, että integraalifunktio on olemassa. Olkoon  $z_0 \in A$  jokin kiinteä piste. Jos  $z \in A$ , yhtenäisyydestä seuraa (kuten yllä seurauslauseen 7.13 todistuksessa), että on olemassa paloittain  $C^1$  polku  $\gamma_z$  alueessa  $A$ , jonka alkupiste on  $z_0$  ja loppupiste  $z$ . Jos  $\gamma$  on jokin toinen tällainen polku  $z_0$ :sta  $z$ :aan, niin  $\gamma^{-1} * \gamma_z$  on paloittain  $C^1$  umpinainen polku ja siten oletuksen mukaan

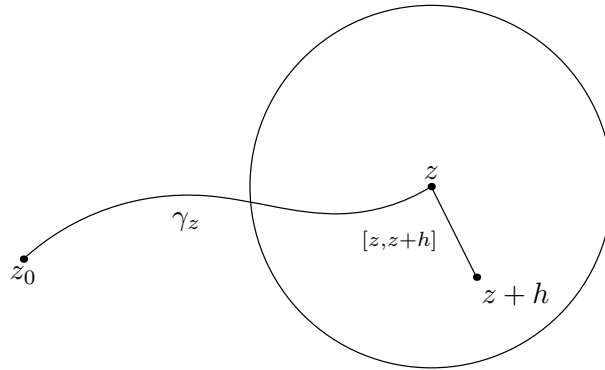
$$0 = \int_{\gamma^{-1} * \gamma_z} f d\zeta = - \int_{\gamma} f d\zeta + \int_{\gamma_z} f d\zeta.$$

(Merkitsimme tässä ”integroimisuuuttujaa”  $\zeta$ :lla, koska symboli  $z$  oli jo käytetty muuhun tarkoitukseen.) Toisin sanoen, jos määrittelemme

$$(7.15) \quad F(z) = \int_{\gamma_z} f d\zeta,$$

niin luku  $F(z)$  ei riipu polun  $\gamma_z$  valinnasta.

Osoitamme, että yhtälön (7.15) määrittelemä funktio  $F: A \rightarrow \mathbb{C}$  on  $f$ :n integraalifunktio. Olkoon  $z \in A$  mielivaltainen, ja valitaan  $r > 0$  siten, että  $D(z, r) \subset A$ . Kun  $0 < |h| < r$ , olkoon  $\gamma_{z+h}$  tulopolku  $\gamma_z * [z, z+h]$ , jossa jälkimmäisellä tekijällä tarkoitamme janapolkua  $z$ :sta pisteeseen  $z+h$  (ks. kuva alla).



Toisin sanoen  $\gamma_{z+h}$  on polku  $z_0$ :sta pisteeseen  $z+h$ , joka saadaan kulkemalla ensin polkua  $\gamma_z$  pitkin pisteeseen  $z$  ja jatkamalla tästä yhdysjanaa  $[z, z+h]$  pitkin pisteeseen  $z+h$ . Käyttämällä integraalin additiivisuutta polun suhteen ja kaavan (7.15) riippumattomuutta polusta saamme nyt

$$F(z+h) - F(z) = \int_{\gamma_{z+h}} f d\zeta - \int_{\gamma_z} f d\zeta = \int_{[z, z+h]} f d\zeta.$$

Siten

$$\begin{aligned} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} f d\zeta - f(z) \\ &= \frac{1}{h} \int_{[z, z+h]} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta. \end{aligned}$$

Koska janan  $[z, z+h]$  pituus on  $|h|$ , saamme apulauseen 7.9 nojalla tästä arvion

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \leq \sup\{|f(\zeta) - f(z)| : \zeta \in [z, z+h]\}.$$

Mutta tämä  $\rightarrow 0$ , kun  $h \rightarrow 0$ , sillä  $f$  on jatkuva  $z$ :ssa. Siispä  $F'(z) = f(z)$ .  $\square$

Edellisellä lauseella on mielenkiintoinen seuraus, joka on jatkoa esimerkkiin 7.4b.

**7.16 Seuraus.** a) Funktiolla  $f(z) = 1/z$  ei ole integraalifunktiota alueessa  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .  
b) Logaritmilla ei ole haaraa alueessa  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

*Todistus.* a) Esimerkissä 7.4b laskettiin, että funktion  $f$  integraali yli positiivisesti suunnistetun yksikköympyrän kehän on

$$\int_{\partial D(0,1)} \frac{dz}{z} = 2\pi i \neq 0.$$

Siten edellisen lauseen nojalla  $f$ :llä ei ole integraalifunktiota.

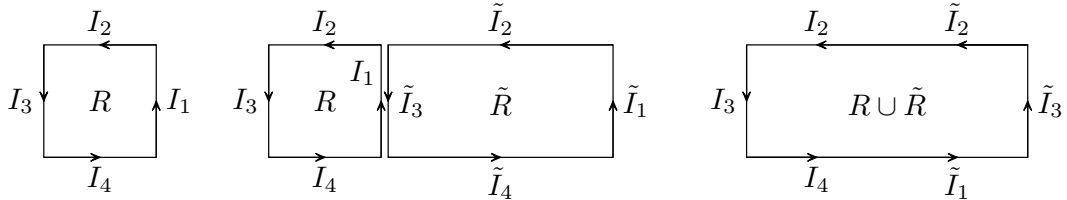
b) Jos logaritmilla olisi haara  $g$  alueessa  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , kyseessä olisi jatkuva funktio, jolle  $e^{g(z)} = z$  kaikilla  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  (ks. määritelmä 3.23). Mutta tällöin käänteisfunktion derivointisäännön 3.24 mukaan pätsi  $g'(z) = 1/z$  kaikilla  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  eli  $g$  olisi integraalifunktio  $f$ :lle, mikä on ristiriita.  $\square$

Muista kuitenkin, että esimerkiksi aukileikatussa tasossa  $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$  logaritmilla on haara ja samalla tämä on integraalifunktio funktiolle  $1/z$  kyseisessä alueessa (ks. lause 5.13)!

## Goursat'n lemma

Tavoitteenamme on todistaa, että analyttinen funktio toteuttaa lauseen 7.14 kriteerin tietyn ehdoin (tietynlaisissa alueissa). Tästä kertoo Cauchyn integraalilause. Tässä jaksossa todistamme sen erään erikoistapauksen, Goursat'n lemmän.

Lähtökohtana ja ideana meillä on seuraava ilmiö: Olkoon  $R$  jokin suorakulmio, jonka reuna  $\partial R$  on positiivisesti (eli vastapäivään) suunnistettu. Silloin  $\partial R$  on neljän suunnistetun janan yhdiste, eli aikaisempia merkintöjä soveltaen voisimme kirjoittaa  $\partial R = I_1 * I_2 * I_3 * I_4$  (ks. vasemmanpuoleinen kuva alla). Olkoon sitten  $\tilde{R}$  toinen suorakulmio, jonka reuna niin ikään suunnistetaan positiivisesti ja jolla on yksi yhteinen sivu  $R$ :n kanssa (keskimmäinen kuva). Joukkoina tietysti  $I_1 = \tilde{I}_3$ , mutta jos valitsemme sopivat *suunnanmukaiset* parametrisitykset, niin kyseessä ovat toistensa vastapolut.



Siten kuvan merkinnöin pätee  $\int_{I_1} f dz = -\int_{\tilde{I}_3} f dz$ , parametrisoinneista riippumatta. Käyttämällä polkuintegraalin additiivisuutta integroimispolun suhteen näemme siis, että

$$\int_{\partial R} f dz + \int_{\partial \tilde{R}} f dz = \int_{\partial(R \cup \tilde{R})} f dz$$

(vrt. oikeanpuoleinen kuva). Huomaa myös, että reunapolkujen parametrintien rooli on nyt kutistunut lähes näkymättömiin; integraalit voidaan ymmärtää lasketuiksi suunnistettujen reunakäyrien yli.

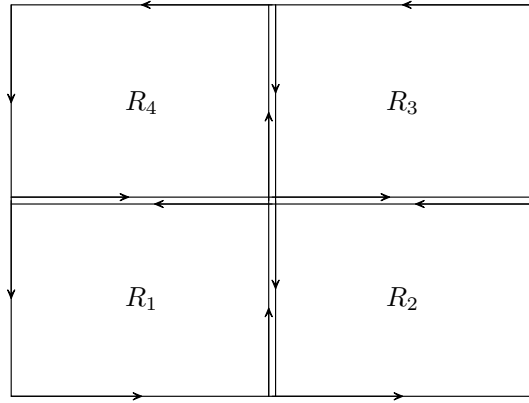
On tietysti selvää, että samanlainen päättely voidaan tehdä monille muillekin käyrille. Tällaisten kumoutumisilmiöiden käyttö onkin erittäin tehokas työkalu polku-integraalien yhteydessä, ja sitä hyödynnetään funktioteoriassa paljon.

**7.17 Apulause** (Goursat'n lemma). *Olkoon  $R \subset \mathbb{C}$  suljettu suorakulmio ("sisusta" mukaanlukien), jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaisia. Oletetaan, että  $f$  on analyttinen  $R$ :n ympäristössä. Jos  $\partial R$  on  $R$ :n positiivisesti suunnistettu reuna, niin  $\int_{\partial R} f dz = 0$ .*

*Todistus.* Olkoon  $I = \int_{\partial R} f dz$ , ja olkoon lisäksi  $L$  reunakäyrän  $\partial R$  kokonaispituus. Jaetaan  $R$  neljään yhtenevään suorakulmioon  $R_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , puolittamalla se vaakasuoraan ja pystysuoraan. Suunnistetaan reunat  $\partial R_j$  positiivisesti. Päättelämälä kuten edellä selostimme eli käyttämällä hyväksi sitä, että polun suunnistuksen vaihtaminen muuttaa integraalin merkin, näemme että

$$I = \int_{\partial R} f dz = \int_{\partial R_1} f dz + \int_{\partial R_2} f dz + \int_{\partial R_3} f dz + \int_{\partial R_4} f dz$$

(ks. kuva alla).



Kolmioepäyhtälön nojalla jollekin näistä neljästä pikkusuorakulmiosta  $R_j$  on voimassa

$$|I| \leq 4 \left| \int_{\partial R_j} f dz \right|.$$

Merkitään tätä suorakulmiota  $R^{(1)}$ :llä ja olkoon  $I_1 = \int_{\partial R^{(1)}} f dz$ .

Soveltamalla tehtyä päättelyä  $R$ :n sijasta  $R^{(1)}$ :een löydämme samoin  $R^{(1)}$ :n osasuorakulmion  $R^{(2)}$ , jolle

$$|I_1| \leq 4 \left| \int_{\partial R^{(2)}} f dz \right|.$$

Jatkamalla näin saamme jonon sisäkkäisiä, yhdenmuotoisia suljettuja suorakulmioita

$$R \supset R^{(1)} \supset R^{(2)} \supset R^{(3)} \supset \dots$$

siten, että jos

$$I_n = \int_{\partial R^{(n)}} f dz,$$

niin

$$(7.18) \quad |I| \leq 4|I_1| \leq \dots \leq 4^n |I_n| \leq 4^{n+1} |I_{n+1}| \leq \dots$$

Lisäksi suorakulmion  $R^{(n)}$  reunan  $\partial R^{(n)}$  pituus on  $2^{-n}L$ , sillä sivujen pituudet puolittuvat joka askelella.

Osoitamme seuraavaksi, että leikkaus  $R^\infty = \bigcap_{n=1}^\infty R^{(n)}$  sisältää täsmälleen yhden pisteen. Koska joukon  $R^{(n)}$  läpimitta on varmasti  $\leq 2^{-n}L$ , joka  $\rightarrow 0$ , kun  $n \rightarrow \infty$ , leikkaus  $R^\infty$  sisältää korkeintaan yhden pisteen. Valitaan nyt jokaisella  $n \geq 1$  mielivaltainen  $z_n \in R^{(n)}$ . Koska  $z_k \in R^{(n)}$ , kun  $k \geq n$ , on  $(z_n)$  Cauchy-jono, joten sillä on raja-arvo  $z^* = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n$ . Koska jokainen  $R^{(n)}$  on suljettu, sisältyy  $z^*$  jokaiseen joukoista  $R^{(n)}$  ja siten myös niiden leikkaukseen.

Olkoon nyt  $\epsilon > 0$  mielivaltainen ja  $\delta > 0$  niin pieni, että  $f$  on analyyttinen kiekossa  $D(z^*, \delta)$  ja

$$(7.19) \quad |f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| \leq \epsilon |z - z^*|,$$

kun  $|z - z^*| < \delta$ . Tämä on mahdollista, sillä  $f$  on analyyttinen pisteessä  $z^*$  (ks. apulause 3.3). Olkoon  $n$  niin suuri, että  $R^{(n)} \subset D(z^*, \delta)$ . Koska vakiofunktioilla 1 on integraalifunktio  $z$  ja  $z$ :lla on integraalifunktio  $z^2/2$ , lauseen 7.14 nojalla niiden

integraalit yli reunan  $\partial R^{(n)}$  häviävät. Siten epäyhtälön (7.19) ja apulauseen 7.9 avulla saamme

$$|I_n| = \left| \int_{\partial R^{(n)}} [f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)] dz \right| \leq \epsilon \int_{\partial R^{(n)}} |z - z^*| |dz|.$$

Tässä  $|z - z^*| \leq 2^{-n}L$  kaikilla  $z \in \partial R^{(n)}$ , joten saamme edelleen arvion

$$|I_n| \leq \epsilon \cdot 2^{-n}L \cdot 2^{-n}L = 4^{-n}L^2\epsilon.$$

Yhdistämällä tämän arvion epäyhtälöön (7.18) näemme, että  $|I| \leq L^2\epsilon$ . Koska  $\epsilon$  oli mielivaltainen positiiviluku, on oltava  $I = 0$ .  $\square$

### Cauchyn integraalilause kiekossa

Todistamme nyt perusversion tämän kurssin tärkeimmästä tuloksesta, Cauchyn integraalilauseesta.

**7.20 Lause** (Cauchyn integraalilause). *Oletetaan, että funktio  $f$  on analyyttinen kiekossa  $D = D(z_0, R)$ . Tällöin*

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

*jokaisella umpinaisella paloittain  $C^1$  polulla  $\gamma$  kiekossa  $D$ .*

*Erityisesti, kiekossa  $D$  jokaisella analyyttisellä funktiolla on integraalifunktio.*

*Todistus.* Käytämme Lausetta 7.14, jolloin riittää osoittaa, että  $f$ :llä on integraalifunktio  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Konstruoimme  $F$ :n samanlaisella idealla kuin tuon lauseen todistuksessa, mutta käyttäen koordinaattiakselien suuntaisista janoista muodostettuja polkuja.

Kun  $z = x + iy \in D$  on mielivaltainen piste, yhdistetään kiekon keskipiste  $z_0 = x_0 + iy_0$  tähän pisteeseen  $z$  sellaisella polulla  $\gamma_z$ , joka saadaan kulkemalla ensin  $z_0$ :sta vaakasuoraan pisteeseen  $x + iy_0$  ja sitten pystysuoraan pisteeseen  $z$ . Polku  $\gamma_z$  on siis tulo kahdesta janapolusta. Huomaa erityisesti, että kiekon geometriasta seuraa, että polku  $\gamma_z$  pysyy aina kiekossa  $D$  (varmistu asiasta piirtämällä kuva). Määrittelemme

$$F(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta.$$

Näin saamme funktion  $F : D \rightarrow \mathbb{C}$ . Osoitamme, että  $F$  on analyyttinen, toteamalla, että Cauchyn ja Riemannin yhtälöt ovat sille voimassa  $D$ :ssä (ks. lause 3.15). Päätteley tulee myös osoittamaan, että  $F' = f$ . Kirjoitetaan  $f = u + iv$  ja  $F = U + iV$ .

Olkoon  $z \in D$ . Tarkastellaan ensin osittaisderivaattoja  $y$ :n suhteen. Jos  $h \neq 0$  on reaalinen ja  $|h|$  kyllin pieni, niin voimme kirjoittaa

$$\frac{F(z + ih) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \int_z^{z+ih} f(\zeta) d\zeta = \frac{i}{h} \int_0^h f(z + it) dt.$$

Tässä  $\int_z^{z+ih}$  tarkoittaa polkuintegraalia pitkin janaa pisteestä  $z$  pisteeseen  $z + ih$ , jolle käytimme viimeisessä integraalissa parametriesitystä  $t \mapsto z + it$ . (Selvitä itsellesi

tämä erotusosamäärän esitys; piirrä samaan kuvaan polut  $\gamma_z$  ja  $\gamma_{z+ih}$ .) Koska  $f$  on jatkuva pisteessä  $z$ , näemme, että

$$\lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{F(z+ih) - F(z)}{h} = if(z) = -v(z) + iu(z).$$

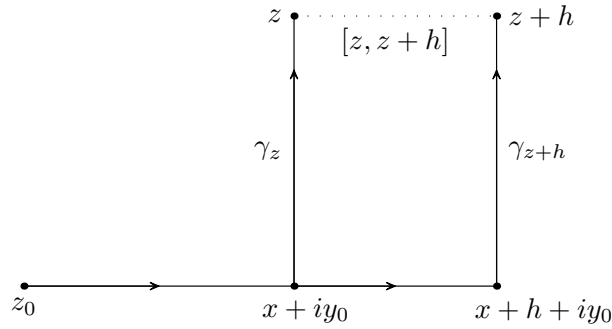
Identifioimalla tässä reaali- ja imaginaariosat puolittain saamme yhtälöt

$$(7.21) \quad U_y(z) = -v(z), \quad V_y(z) = u(z).$$

Tutkimme sitten osittaisderivaattoja  $x$ :n suhteen pisteessä  $z$ . Olkoon taas  $h \neq 0$  reaalinen itseisarvoltaan pieni luku. Sovelletaan Goursat'n lemmaa nelikulmioon, jonka kärjet ovat  $x + iy_0$ ,  $x + h + iy_0$ ,  $z + h$  ja  $z$ . Tämä sisältyy kiekkoon  $D$ , kunhan  $|h|$  on kyllin pieni. Ottaen huomioon janojen suunnistukset saamme

$$\int_{\gamma_{z+h}} f(\zeta) d\zeta - \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta = 0$$

(ks. kuva alla).



Siten

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} = \frac{1}{h} \left( \int_{\gamma_{z+h}} f(\zeta) d\zeta - \int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta \right) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta.$$

Samoin kuin edellä näemme, että

$$\lim_{\mathbb{R} \ni h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z) = u(z) + iv(z),$$

joten

$$(7.22) \quad U_x(z) = u(z), \quad V_x(z) = v(z).$$

Vertaamalla yhtälöitä (7.21) ja (7.22) päätelemme, että  $F = U + iV$  toteuttaa Cauchyn ja Riemannin yhtälöt. Koska lisäksi  $f = u + iv$  on analyyttinen, ovat  $u$  ja  $v$  jatkuvia  $D$ :ssä, joten  $U$  ja  $V$  ovat jatkuvasti derivoituvia ja siten differentioituvia  $D$ :ssä (ks. huomautus 3.17a). Siispä lauseen 3.15 perusteella  $F$  on analyyttinen ja

$$F'(z) = U_x(z) + iV_x(z) = u(z) + iv(z) = f(z).$$

$F$  on siis etsitty integraalifunktio  $f$ :lle. □

**7.23 Huomautus.** a) Cauchyn lauseessa 7.20 kiekon rooli on tärkeä: lauseen väite ei päde kaikissa kompleksitason osa-alueissa. Esimerkkinä alue  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , jossa funktiolle  $1/z$  pätee  $\int_{\partial D(0,1)} dz/z = 2\pi i \neq 0$ .

Alueet, joissa lause 7.20 pätee, voidaan karakterisoida topologisella ehdolla (*yhdesti yhtenäisyys*); palaamme tähän ajan salliessa myöhemmin. Huomaa kuitenkin jo nyt, että yo. todistus toimii käytännössä sellaisenaan vaikkapa puolitasossa tai suorakulmiossa (keskipisteen sijasta valitaan jokin muu ”kantapiste”  $z_0$ ).

b) Cauchyn lause voidaan todistaa varsin helposti differentiaali- ja integraalilaskennassa (vektorianalyysin kurssi) esitetyn Greenin kaavan<sup>1</sup> avulla, mikäli oletetaan lisäksi, että  $f'$  on jatkuva. Goursat’n lemmaa ei siis tällöin tarvita. Myöhemmin osoitamme, että analyyttisen funktion derivaatta on aina peräti analyyttinen, joten todellisuudessa kyse ei ole rajoittavasta oletuksesta; tämän seikan todistus kuitenkin perustuu viime kädessä Cauchyn lauseeseen. Joissakin oppikirjoissa vaatimus  $f'$ :n jatkuvuudesta otetaan mukaan jo analyyttisyyden määritelmään.

c) Goursat’n lemmasta on erilaisia versioita. Usein siinä tarkastellaan kolmion reunaa suorakulmion sijasta. Tällöin Cauchyn lauseen todistus on vastaavasti jonkin verran erilainen (ehkä hieman suoraviivaisempi). Meidän käyttämämme lähestymistapa löytyy mm. Ahlforsin kuuluisasta oppikirjasta *Complex Analysis* (1953).

---

<sup>1</sup>Ks. esim. O. MARTIO: *Vektorianalyysi*, Limes ry (2. korj. p. 2008), lause 6.2.1.

## 8 Cauchyn kaava ja sen seurauksia

Cauchyn integraalilause 7.20 johtaa toiseen kompleksianalyysin keskeiseen menetelmään, *Cauchyn integraalikaavaan*. Esitämme tämän luvun aluksi integraalikaavan n.k. lokaalin version yleisessä alueessa  $A \subset \mathbb{C}$ .

Cauchyn integraalikaava kertoo, miten analyyttisen funktion arvot kiekon sisäpisteissä voidaan laskea sen arvoista kiekon reunalla. Tuloksella on perustava merkitys analyyttisten funktioiden teoriassa. Tästä esimerkkinä todistamme integraalikaavan avulla muutamia analyyttisten funktioiden tärkeitä perusominaisuuksia.

### Cauchyn integraalikaava ympyränkehälle

**8.1 Lause** (Cauchyn integraalikaava, lokaali muoto). *Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen avoimessa joukossa  $A \subset \mathbb{C}$  ja kiekolle  $D = D(z_0, r)$  pätee  $\bar{D} \subset A$ . Tällöin*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D,$$

*kun  $\partial D$  on  $D$ :n reuna suunnistettuna vastapäivään.*

Tässä reunaympyrän  $\partial D$  voi parametrisoida esimerkiksi polulla  $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , tai jollakin muulla suunnanmukaisella jatkuvasti derivoituvalla polulla.

Cauchyn integraalikaavan nojalla analyyttisen funktion  $f$  arvot kiekon  $D(z_0, r)$  sisällä voidaan siis määrittää yksikäsitteisesti, jos tunnetaan  $f$ :n arvot ko. kiekon reunalla. Nähdään myös, että jokainen analyyttinen funktio voidaan lausua (reuna-arvoilla  $f(\zeta)$  painotettuna) integraalina eli ”jatkuvana summana” yksinkertaisista analyyttisistä funktioista, jotka ovat muotoa  $z \mapsto 1/(\zeta - z)$ . Esitys on tietysti lokaali siinä mielessä, että se riippuu valitusta kiekosta  $D(z_0, r) \subset A$ .

Cauchyn kaavan avulla voi joskus laskea kätevästi integraaleja, jotka suoraan määritelmään perustuen olisivat hyvinkin vaikeita.

**8.2 Esimerkki.** On laskettava integraali

$$I = \int_{\partial D(0,1)} \frac{e^z}{z(z-2)} dz$$

yksikköympyrän vastapäivään (l. positiiviseen suuntaan) suunnistetun kehän yli. Havaitaan, että funktio  $f(z) = e^z/(z-2)$  on analyyttinen kiekossa  $D(0, 2)$ , johon  $\bar{D}(0, 1)$  sisältyy. Siten Cauchyn kaavan nojalla

$$I = \int_{\partial D(0,1)} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i \cdot f(0) = 2\pi i \cdot (-1/2) = -\pi i.$$

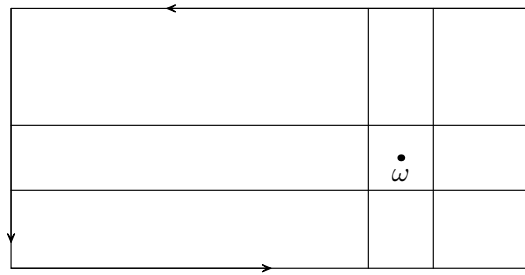


Ryhdyimme seuraavaksi todistamaan lausetta 8.1. Tarvitsemme tätä varten pienen teknisen yleistyksen Goursat'n lemmalle 7.17 ja vastaavasti Cauchyn lauseelle 7.20. Yleistyksissä sallimme, että niissä tarkasteltavalla funktiolla  $f$  on yksi piste, jossa funktio ei (a priori) ole analyyttinen vaan ainoastaan jatkuva. Myöhempien tulosten valossa on kyllä helppoa nähdä, että tämä yleistys on vain näennäinen:  $f$  on väistämättä analyyttinen myös kyseisessä erikoispisteessä, mutta emme tiedä sitä vielä.

**8.3 Apulause.** *Olkkoon  $R \subset \mathbb{C}$  suljettu suorakulmio kuten Goursat'n lemmassa 7.17 ja olkkoon  $w \in R$ . Oletetaan, että  $U$  on  $R$ :n ympäristö siten, että funktio  $f$  on analyyttinen joukossa  $U \setminus \{w\}$  ja jatkuva myös pisteessä  $w$ . Tällöin  $\int_{\partial R} f dz = 0$ .*

*Todistus.* Koska  $f$  on jatkuva koko suorakulmiossa  $R$  (joka on suljettu ja rajoitettu joukko), se on siellä rajoitettu:  $|f(z)| \leq M < \infty$  kaikilla  $z \in R$ .

Olkkoon  $w$  aluksi  $R$ :n sisäpiste. Valitaan pieni neliö  $R_0 \subset \text{int } R$ , jonka keskipiste on  $w$  ja sivut koordinaattiakselien suuntaisia. Jos  $R_0$ :n sivujanoja jatketaan, suorakulmio  $R$  jakautuu yhdeksään osasuorakulmioon  $R_j$ :  $R = \bigcup_{j=0}^8 R_j$  (ks. kuva alla).

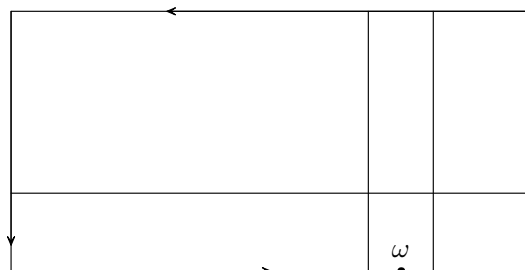


Suunnistetaan reunat  $\partial R_j$  vastapäivään, ja olkkoon reunan  $\partial R_0$  pituus  $\delta > 0$ . Käyttämällä hyväksi vastakkaisuuntaisten polkuintegraalien kumoutumista kuten Goursat'n lemmän todistuksessa, näemme, että  $\int_{\partial R} f dz = \sum_{j=0}^8 \int_{\partial R_j} f dz$ . Toisaalta alkuperäisen Goursat'n lemmän nojalla  $\int_{\partial R_j} f dz = 0$ , kun  $1 \leq j \leq 8$ . Siten saamme

$$\left| \int_{\partial R} f dz \right| = \left| \int_{\partial R_0} f dz \right| \leq \int_{\partial R_0} |f| |dz| \leq M\delta$$

apulauseen 7.9 nojalla. Koska voidaan antaa  $\delta \rightarrow 0+$ , niin  $\int_{\partial R} f dz = 0$ .

Jos  $w$  on  $R$ :n reunapiste, jaamme  $R$ :n kuuteen osasuorakulmioon (tai vain neljään siinä tapauksessa, että  $w$  on  $R$ :n kulmapiste) yhdeksän sijasta (ks. kuva alla); nyt  $R_0$  on pieni neliö jonka reunapisteenä on  $w$ .



Loppuosa päättelystä tehdään samalla idealla kuin äsken.  $\square$

**8.4 Lause.** Olkoon  $D = D(z_0, R)$  kiekko ja  $w \in D$ . Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen joukossa  $D \setminus \{w\}$  ja jatkuva myös pisteessä  $w$ . Tällöin

$$\int_{\gamma} f dz = 0$$

jokaisella umpinaisella paloittain  $C^1$  polulla  $\gamma$  kiekossa  $D$ .

*Todistus.* Täysin sama kuin lauseen 7.20 todistus, kunhan vain Goursat'n lemmasta käytetään yo. versiota 8.3. Pane merkille, että  $f$ :n analyyttisyyttä ei todistuksessa suoraan tarvittu: riitti, että  $f$  on jatkuva ja Goursat'n lemma pätee.  $\square$

Olemme nyt valmiit todistamaan Cauchyn integraalikaavan.

*Lauseen 8.1 todistus.* Olkoon  $z \in D = D(z_0, r)$  kiinteä ja

$$F(\zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \in D \setminus \{z\}, \\ f'(z), & \zeta = z. \end{cases}$$

Tällöin  $F$  on analyyttinen joukossa  $D \setminus \{z\}$  ja jatkuva sen lisäksi myös  $z$ :ssa. Koska  $\overline{D} \subset A$  ja  $A$  on avoin,  $\overline{D}$  sisältyy hieman suurempaan avoimeen kiekkoon, joka yhä sisältyy  $A$ :han. Siten voidaan soveltaa edellistä lausetta 8.4, jonka mukaan

$$0 = \int_{\partial D} F(\zeta) d\zeta = \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.$$

Väite seuraa, jos osoitamme, että tässä viimeisenä esiintyvä integraali on  $2\pi i$ . Oletetaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi, että  $z_0 = 0$ , ja lasketaan parametriesitystä  $\zeta = re^{it}$  käyttäen:

$$(8.5) \quad \begin{aligned} \int_{\partial D} \frac{d\zeta}{\zeta - z} &= \int_0^{2\pi} \frac{rie^{it}}{re^{it} - z} dt = i \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - \frac{z}{r} e^{-it}} \\ &= i \int_0^{2\pi} \left( 1 + \frac{\frac{z}{r} e^{-it}}{1 - \frac{z}{r} e^{-it}} \right) dt = 2\pi i + \int_0^{2\pi} \frac{\frac{z}{r} i e^{-it}}{1 - \frac{z}{r} e^{-it}} dt. \end{aligned}$$

Viimeinen integraali tässä voidaan puolestaan tulkita polkuintegraalina  $\int_{\sigma} d\xi/(1 + \xi)$ , kun  $\sigma$  on polku  $\sigma(t) = -\frac{z}{r} e^{-it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Koska  $|\frac{z}{r}| < 1$ , kyseessä on umpinainen polku yksikkökiekossa  $D(0, 1)$ . Ja koska funktio  $\xi \mapsto 1/(1 + \xi)$  on selvästi analyyttinen yksikkökiekossa, Cauchyn integraalilauseen 7.20 nojalla kyseinen integraali  $\int_{\sigma} d\xi/(1 + \xi)$  häviää. Siten kaavan (8.5) integraalin arvo on  $2\pi i$ .  $\square$

### Analyttisen funktion Taylor-sarja

Ensimmäisenä sovelluksena Cauchyn integraalikaavasta osoitamme, että jokainen analyyttinen funktio on lokaalisti suppenevan potenssisarjan summa.

Tarvitsemme sarjojen tasaista suppenemista, ja sitä varten palautamme mieleen seuraavan perustyökalun:

**8.6 Apulause** (Weierstrassin kriteeri). Olkoot  $f_k: A \rightarrow \mathbb{C}$  funktioita sekä  $c_k$  positiivisia lukuja, joille

$$|f_k(z)| \leq c_k \quad \text{kaikilla } z \in A, k \geq 0.$$

Jos sarja  $\sum_k c_k$  suppenee, niin  $\sum_k f_k$  suppenee tasaisesti (ja itseisesti)  $A$ :ssa.

*Todistus.* Majoranttiperiaatteen nojalla  $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$  suppenee itseisesti, kun  $z \in A$ . Olkoon sen summa  $f(z)$ . Olkoon  $\epsilon > 0$ . Tällöin on olemassa  $N \geq 1$  siten, että  $\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \epsilon$ , kun  $n \geq N$ . Siten kaikilla  $n \geq N$  ja  $z \in A$  pätee

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^n f_k(z) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k < \epsilon.$$

Tämä merkitsee, että osasummat  $\sum_{k=0}^n f_k$  suppenevat tasaisesti kohti  $f$ :ää joukossa  $A$ , mikä todistaa väitteen.  $\square$

**8.7 Lause.** Olkoon  $f$  analyyttinen avoimessa joukossa  $A \subset \mathbb{C}$ . Jos  $D(z_0, R) \subset A$ , niin  $f$ :llä on kiekossa  $D(z_0, R)$  esitys suppenevan potenssisarjan summana:

$$(8.8) \quad f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0, R),$$

jossa

$$(8.9) \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

kun  $0 < r < R$  ja ympyrä  $\partial D(z_0, r)$  suunnistetaan positiivisesti.

Analyyttinen funktio voidaan siis määrittelyjoukkonsa jokaisen pisteen ympäristössä kehittää potenssisarjaksi. Tämä esitys ei yleensä ole voimassa koko  $A$ :ssa. Huomaa kuitenkin, että kiekon  $D(z_0, R)$  säde  $R$  voidaan valita maksimaalisen suureksi, ts. pisteen  $z_0$  etäisyydeksi joukon  $A$  reunasta. Jos  $A = \mathbb{C}$ , on ko. sarjaesitys itse asiassa voimassa koko tasossa ja voimme tulkita yllä  $R = \infty$ .

*Todistus.* Olkoot  $0 < r < R$  ja  $z \in D(z_0, r)$ . Cauchyn integraalikaavan 8.1 nojalla on

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Jokaisella  $\zeta \in \partial D(z_0, r)$  voidaan kirjoittaa

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k,$$

koska  $|z - z_0|/|\zeta - z_0| = |z - z_0|/r < 1$ . Näin ollen

$$(8.10) \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k d\zeta.$$

Koska  $f$  on jatkuva kompaktissa joukossa  $\partial D(z_0, r)$ , se on siellä rajoitettu:  $|f(\zeta)| \leq M < \infty$  kaikilla  $\zeta \in \partial D(z_0, r)$ . Siten

$$\left| \frac{f(\zeta)}{\zeta - z_0} \left( \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^k \right| \leq \frac{M}{r} \left( \frac{|z - z_0|}{r} \right)^k.$$

Koska näin saadut majorantit muodostavat suppenevan geometrisen sarjan, Weierstrassin kriteerin mukaan kaavan (8.10) sarja suppenee tasaisesti ympyrällä  $\partial D(z_0, r)$ . Niinpä voimme vaihtaa summauksen ja integroinnin järjestystä (vrt. HT 10/teht. 6), jolloin saamme:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta \right) (z - z_0)^k,$$

mikä on vaadittu esitys.

Huomaa lopuksi, että edellä  $r$  voidaan valita mielivaltaisen läheltä sädettä  $R$  ja potenssisarjan kertoimien yksikäsitteisyyden nojalla tuloksena saadaan aina sama sarja. Siten esitys (8.8) on voimassa koko kiekossa  $D(z_0, R)$ .  $\square$

Taylor-sarjakehitelmän olemassaolosta saamme monia mielenkiintoisia seurauksia. Näissä kaikissa oletamme, että  $A$  on kompleksitason avoin osajoukko.

**8.11 Seuraus.** *Jos  $f$  on analyyttinen  $A$ :ssa, niin myös  $f'$  on analyyttinen  $A$ :ssa. Yleisemmin  $f$ :llä on  $A$ :ssa kaikkien kertalukujen derivaatat ja*

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta,$$

kun  $\overline{D}(z_0, r) \subset A$ .

*Todistus.* Edellisen lauseen mukaan  $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$  kiekossa  $D(z_0, r)$ , kun  $a_k$  määritellään kaavalla (8.9). Toisaalta potenssisarjojen derivointia koskevan seuralauseen 4.10 nojalla  $f^{(k)}(z_0) = k!a_k$ .  $\square$

**8.12 Huomautus.** Edellisen seurauksen integraalikaava  $f^{(k)}$ :lle on voimassa muualakin kuin vain kyseisen kiekon keskipisteessä. Kuten Cauchyn kaavassa 8.1, pätee nimittäin

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta, \quad z \in D(z_0, r),$$

kun  $\overline{D}(z_0, r) \subset A$ . Toisin sanoen Cauchyn kaavassa voidaan derivoida ”integraalimerkin alla”. Tämän todistus on harjoitustehtävä.

**8.13 Seuraus.** *Jos  $f$  on analyyttinen  $A$ :ssa ja  $f = u + iv$ , niin  $u$ :lla ja  $v$ :llä on  $A$ :ssa kaikkien kertalukujen osittaisderivaatat.*

*Todistus.* Lauseen 3.15 nojalla  $u$ :lla ja  $v$ :llä on ensimmäisen kertaluvun osittaisderivaatat ja  $f' = u_x + iv_x = v_y - iu_y$ . Koska nyt tiedämme, että  $f'$  on analyyttinen, voimme soveltaa samaa tulosta näihin  $f'$ :n esityksiin, jolloin näemme, että  $u$ :lla ja  $v$ :llä on kaikki toisen kertaluvun osittaisderivaatat. Yleinen väite seuraa induktiolla.  $\square$

Käänteiseen suuntaan saamme riittäviä ehtoja analytyttisyydelle. Osoittautuu, että lauseen 7.14 tilanteessa funktio  $f$  on väistämättä analytyttinen.

**8.14 Seuraus.** *Oletetaan, että funktiolla  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  on integraalifunktio. Tällöin  $f$  on analytyttinen.*

*Todistus.* Olkoon  $F$  funktion  $f$  integraalifunktio. Siis  $F$  on analytyttinen ja  $F' = f$ . Seurauksen 8.11 nojalla  $f$  on analytyttinen.  $\square$

Viimeinen seuraus on klassinen käänteistulos Cauchyn integraalilauseelle:

**8.15 Seuraus** (Morera'n lause). *Oletetaan, että  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  on jatkuva ja  $\int_{\gamma} f dz = 0$  jokaisella umpinaisella paloittain  $C^1$  polulla  $\gamma$  joukossa  $A$ . Tällöin  $f$  on analytyttinen.*

Tässä olisi itse asiassa riittävää vaatia, että  $\int_{\partial R} f dz = 0$  aina kun  $R$  on suljettu suorakulmio, jonka sivut ovat koordinaattiakselien suuntaiset ja joka sisältyy  $A$ :han (Goursat'n lemmän tilanne)! Todistus on harjoitustehtävä. Huomaa, että lähtöjoukosta  $A$  ei nyt tarvinnut olettaa avoimuuden lisäksi mitään. Tämä on ymmärrettävää, kun muistetaan, että analytyttisyys on luonteeltaan täysin lokaali ominaisuus.

### Eräitä Taylor-sarjoja

Eksponenttifunktio  $z \mapsto e^z$  on analytyttinen koko tasossa, ja kaavaa  $\frac{d}{dz} e^z = e^z$  iteroimalla nähdään, että sen jokainen derivaatta origossa on  $e^0 = 1$ . Siten saadaan tuttu Taylor-sarjaesitys

$$(8.16) \quad e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tämä olisi hyvin voitu ottaa eksponenttifunktion määritelmäksi.

Olkoon sitten  $\log$  logaritmfunktion päähaara, joka on määritelty negatiivista reaaliakselia pitkin aukileikatussa tasossa  $A = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ; ks. kaava (5.12) ja lause 5.13. Ei ole mahdollista esittää tätä potenssisarjan summana koko  $A$ :ssa vaan ainoastaan siihen sisältyvissä kiekkoissa, esim. kiekossa  $D(1, 1)$ . Yhtäpitävästi funktiolle  $\log(1+z)$  saadaan yksikkökiekossa esitys (tee yksityiskohdat harjoitustehtävänä)

$$\log(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots, \quad |z| < 1.$$

Se yhtyy positiivisella reaaliakselilla tavalliseen reaaliseen logaritmfunktioon.

Esittelemme vielä lyhyesti trigonometriset funktiot kompleksitasossa.

**8.17 Määritelmä.** Kun  $z \in \mathbb{C}$ , määritellään

$$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}), \quad \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}).$$

Sivulla 7 on todettu, että reaaliakselilla nämä kaavat ovat voimassa reaalille sinille ja kosinille. Lähtemällä eksponenttifunktion Taylor-sarjasta (8.16) voidaan näille johtaa sarjakehitelmät

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots, \quad \cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots$$

kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ .

### Analyyttisen funktion nollakohdat ja yksikäsitteisyys

Taylor-sarjojen avulla voimme tarkastella monia analyyttisten funktioiden lokaaleja ominaisuuksia. Tyypillisenä esimerkkinä ovat funktioiden nollakohdat. Sarjakehitelmän ansiosta analyyttisen funktion nollakohtia voidaan käsitellä samaan tapaan kuin polynomin nollakohtia.

Olkoon  $f$  analyyttinen pisteessä  $z_0$  (ts. jossakin sen ympäristössä) ja  $f(z_0) = 0$ . Lauseesta 8.7 saadaan  $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$  jossakin kiekossa  $D(z_0, R)$ . Oletetaan, että  $n$  on pienin indeksi, jolle  $a_n \neq 0$ . Derivaattojen avulla ilmaistuna siis  $f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(n-1)}(z_0) = 0$  mutta  $f^{(n)}(z_0) \neq 0$ . Tässä tilanteessa voidaan kirjoittaa

$$(8.18) \quad f(z) = (z - z_0)^n g(z), \quad \text{jossa } g \text{ analyyttinen, } g(z_0) \neq 0;$$

nimittäin  $g(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k(z - z_0)^{k-n}$ .

**8.19 Määritelmä.** Yo. tilanteessa  $z_0$  on  $f$ :n  $n$ :nnen kertaluvun nollakohta.

Kuinka suuressa joukossa analyyttinen (ei-vakio) funktio voi hävitä? Tuntemamme esimerkit näyttävät osoittavan, että analyyttisen funktion nollakohtien joukko on yleensä varsin pieni ja harva, jopa tyhjä.

**8.20 Esimerkki.** Merkitään  $E(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ . Jos  $f(z) = e^z$ , niin  $E(f) = \emptyset$ . Jos  $f$  on polynomi,  $E(f)$  on äärellinen, ja jos  $f(z) = \sin z$ , niin  $E(f) = \{n\pi : n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ .

Osoittautuukin, että alueessa määritellyn analyyttisen funktion nollakohdat voivat kasautua korkeintaan alueen reunalle, paitsi jos funktio on identtisesti nolla. (Palauta mieleen kasautumispisteen käsite topologiasta tai luvusta 2.)

**8.21 Lause.** *Olkoon  $f$  analyyttinen alueessa  $A \subset \mathbb{C}$ . Oletetaan, että joukolla  $E = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$  on kasautumispiste  $A$ :ssa. Tällöin  $f \equiv 0$   $A$ :ssa.*

*Todistus.* Oletetaan, että  $z_0 \in A$  on  $E$ :n kasautumispiste. Tällöin on olemassa jono  $(z_n)$  joukon  $A \setminus \{z_0\}$  pisteitä, joille  $z_n \rightarrow z_0$ . Olkoon

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k, \quad z \in D(z_0, R),$$

funktion  $f$  lokaali potenssisarjaesitys. Voidaan olettaa, että  $z_n \in D(z_0, R)$  kaikilla  $n$  (leikkaamalla tarvittaessa alkuosa jonosta pois). Osoitamme induktiolla, että  $a_k = 0$

kaikilla  $k \geq 0$ . Jatkuvuuden nojalla  $a_0 = f(z_0) = \lim f(z_n) = 0$ . Oletetaan, että on jo näytetty, että  $a_0 = a_1 = \dots = a_{k-1} = 0$ . Tällöin yhtälön (8.18) mukaisesti  $f(z) = (z - z_0)^k g(z)$ , jossa  $g(z) = a_k + a_{k+1}(z - z_0) + a_{k+2}(z - z_0)^2 + \dots$  kiekossa  $D(z_0, R)$ . Koska  $(z - z_0)^k \neq 0$  pisteissä  $z = z_n$ , on oltava  $g(z_n) = 0$  kaikilla  $n$ . Jatkuvuuden nojalla taas  $a_k = g(z_0) = 0$ . Induktio on siis suoritettu, ja päättelemme, että  $f(z) = 0$  kiekossa  $D(z_0, R)$ .

Jotta voisimme osoittaa  $f \equiv 0$  koko  $A$ :ssa, tarvitsemme pienen topologisen lisäpäätelyn. Olkoon  $E' = \{a \in A : a \text{ on } E\text{:n kasautumispiste}\}$ . Äskeinen päätely osoittaa, että  $E'$  on avoin (oletuksesta  $z_0 \in E'$  seurasi  $D(z_0, R) \subset E'$ ). Toisaalta topologiasta seuraa yleisesti, että kasautumispisteiden joukko on suljettu  $A$ :ssa. Koska  $A$  on yhtenäinen ja oletuksen mukaan  $E'$  on epätyhjä, on oltava  $E' = A$ . Koska  $f$  on jatkuva, välttämättä  $f \equiv 0$ .  $\square$

Soveltamalla edellistä lausetta kahden funktion erotukseen saamme vahvan yksikäsitteisyyslauseen analyyttisille funktioille.

**8.22 Seuraus.** *Olkoot  $f$  ja  $g$  analyyttisiä alueessa  $A \subset \mathbb{C}$ . Jos  $f(z) = g(z)$  joukossa, jolla on kasautumispiste  $A$ :ssa, niin  $f = g$ .*

**8.23 Huomautus.** Pohditaan hetki eksponenttifunktion määritelmää tämän tuloksen valossa. Kaavassa (5.2) määrittelimme  $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ , ja tiedämme, että tämä on a) analyyttinen koko kompleksitasossa ja b) yhtyy reaaliakselilla  $\mathbb{R}$  reaaliseen eksponenttifunktioon  $e^x$ . Koska  $\mathbb{R}$ :llä on kasautumispisteitä  $\mathbb{C}$ :ssä (jokainen  $\mathbb{R}$ :n piste on sellainen), niin seurauksesta 8.22 voimme päätellä, että tämä on itse asiassa ainoa funktio, jolla on mainitut ominaisuudet a ja b!

Vastaavat kommentit voidaan lausua myös määritelmässä 8.17 määritellyistä sini- ja kosinifunktiosta.

## Liouvilien lause

Lauseessa 8.7 analyyttisen funktion  $f$  arvot kiekon reunalla kontrolloivat  $f$ :n Taylorin sarjan kertoimia eli derivaattoja kiekon keskipisteessä. Tätä seikkaa voi hyödyntää monellakin tavalla; tässä jaksossa osoitamme, että koko tasossa analyyttinen funktio (eli ns. *kokonainen* funktio) voi olla rajoitettu vain jos se on vakio. Tällä on helppona seurauksena algebran peruslause, jonka mukaan jokaisella epätriviaalilla polynomiyhtälöllä on ratkaisu kompleksitasossa.

**8.24 Apulause** (Cauchyn kerroinarvio). *Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen kiekon  $\bar{D}(z_0, r)$  ympäristössä ja  $f$ :n lokaali Taylor-sarjaesitys on*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

*Olkoon  $M(r) = \sup\{|f(z)| : z \in \partial D(z_0, r)\}$ . Tällöin*

$$|a_k| \leq \frac{M(r)}{r^k} \quad \text{kaikilla } k \geq 0.$$

*Todistus.* Lauseen 8.7 mukaan

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{k+1}} d\zeta.$$

Apulauseen 7.9 avulla voimme arvioida:

$$|a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D(z_0, r)} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{k+1}} |d\zeta| \leq \frac{1}{2\pi} \frac{M(r)}{r^{k+1}} 2\pi r = \frac{M(r)}{r^k}.$$

□

**8.25 Lause.** *Olkoon  $f$  koko tasossa analyyttinen funktio.*

a) (Liouvillen lause) *Jos  $f$  on rajoitettu, se on vakio.*

b) *Yleisemmin: jos on olemassa luvut  $C > 0$ ,  $R > 0$  ja  $n \geq 0$  siten, että*

$$|f(z)| \leq C|z|^n, \quad \text{kun } |z| > R,$$

*niin  $f$  on polynomi, jonka aste on  $\leq n$ .*

Lauseen jälkimmäinen osa siis kertoo, että jos kokonainen funktio  $f(z)$  kasvaa polynomista vauhtia, kun  $z \rightarrow \infty$ , sen on pakko olla polynomi. Eksponenttifunktio  $e^z$  on perusesimerkki kokonaisesta funktiosta, joka ei ole polynomi.

*Todistus.* Riittää todistaa b-väite, sillä a vastaa erikoistapausta  $n = 0$ .

Nyt lause 8.7 kertoo, että  $f$ :llä on koko tasossa Taylor-sarja

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k.$$

Kun  $r > R$ , saadaan edellisen apulauseen ja oletuksen nojalla kertoimelle  $a_k$  arvio

$$|a_k| \leq \frac{Cr^n}{r^k} = \frac{C}{r^{k-n}}.$$

Jos  $k > n$ , niin tässä  $C/r^{k-n} \rightarrow 0$ , kun  $r \rightarrow \infty$ , joten  $a_k = 0$ . Näin ollen  $f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ . □

Liouvillen lausetta käyttäen saamme lyhyen todistuksen sille, että kompleksilukujen kunta on algebrallisesti suljettu, ts. jokaisella kompleksikertoimisella polynomilla, joka ei ole vakio, on juuri (eli nollakohta)  $\mathbb{C}$ :ssä.

**8.26 Lause** (Algebran peruslause). *Olkoon  $P(z)$  astetta  $n \geq 1$  oleva kompleksikertoiminen polynomi. Tällöin  $P(z) = 0$  jollakin  $z \in \mathbb{C}$ .*

*Todistus.* Kirjoitetaan  $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ , jossa  $a_n \neq 0$ , ja tehdään vasta oletus:  $P(z) \neq 0$  kaikilla  $z \in \mathbb{C}$ . Tällöin funktio  $g = 1/P$  on analyyttinen koko tasossa.

Kuten esimerkissä 6.13a kolmioepäyhtälön avulla saadaan arvio

$$|P(z)| \geq |z|^n \left( |a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right),$$



kun  $z \neq 0$ . Tästä nähdään, että  $|P(z)| \rightarrow \infty$ , kun  $|z| \rightarrow \infty$ , joten on olemassa  $R > 0$  siten, että  $|P(z)| \geq 1$ , kun  $|z| > R$ . Siis  $|g(z)| \leq 1$ , kun  $|z| > R$ . Toisaalta kompaktissa (eli suljetussa ja rajoitetussa) joukossa jatkuva funktio on aina rajoitettu, joten on olemassa  $M$  siten, että  $|g(z)| \leq M$ , kun  $|z| \leq R$ . Näiden arvioiden mukaan  $g$  on koko tasossa analyyttinen ja rajoitettu funktio, siis Liouville'n lauseen nojalla vakio. Siten myös  $P$  on vakio, mikä on ristiriidassa sen kanssa että ko. polynomien aste oli  $\geq 1$ .

Siis  $P$ :llä on ainakin yksi nollakohta. □

Kun  $n$ -asteisella ( $n \geq 1$ ) polynomilla  $P$  on nollakohta  $z_1$ , voimme tunnetusti jakaa sen muotoon  $P(z) = (z - z_1)P_1(z)$ , jossa  $P_1$ :n aste on  $n - 1$  (tämä seuraa myös yhtälöstä (8.18)). Jos  $n \geq 2$ , toistamme saman päättelyn  $P_1$ :lle. Näin jatkamalla saamme jaettua polynomien  $P$  ensimmäisen asteen tekijöihin muotoon

$$P(z) = a_n(z - z_1) \cdots (z - z_n),$$

jossa luvut  $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$  ovat polynomien kaikki nollakohdat. Jokainen polynomi kompleksilukujen kunnassa voidaan näin jakaa ensimmäisen asteen tekijöihin. (Vertaa: Reaalilukujen kunnassa toisen asteen polynomi  $1 + x^2$  on jaoton.)

### Maksimiperiaate ja Schwarzin lemma

Maksimiperiaate eri versioineen on yksi funktioteorian keskeisiä periaatteita. Karkeasti ottaen se kertoo, että analyyttisen funktion moduli saa suurimmat arvonsa määrittelyalueen reunalla; erityisesti modulilla ei ole (lokaaleja) maksimeja itse määrittelyalueessa, paitsi jos funktio on vakio.

Aputulokseksi tarvitsemme seuraavan varsin tyylikkään havainnon: analyyttisen funktion arvo pisteessä  $z_0$  saadaan laskemalla keskiarvo sen arvoista  $z_0$ -keskisellä ympyränkehällä!

**8.27 Apulause** (Gaussin keskiarvolause). *Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen kiekon  $\bar{D}(z_0, r)$  ympäristössä. Tällöin*

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt.$$

*Todistus.* Harjoitukset 10, tehtävä 4. □

**8.28 Lause** (Maksimiperiaatteen heikko muoto). *Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen alueessa  $A \subset \mathbb{C}$ . Jos  $|f|$ :llä on lokaali maksimi jossakin  $A$ :n pisteessä, niin  $f$  on vakio.*

*Todistus.* Olkoon  $z_0 \in A$  piste, jossa  $|f|$ :llä on lokaali maksimi. Siis on olemassa kiekko  $D(z_0, R) \subset A$ , jossa pätee  $|f(z)| \leq |f(z_0)|$ . Kun sovelletaan tätä oletusta ja Gaussin keskiarvolausetta säteellä  $r \in (0, R)$ , saadaan arviot

$$(8.29) \quad |f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{it})| dt \leq |f(z_0)|.$$

Siis itse asiassa tässä yhtäsuuruudet pätevät. Väitämme, että  $|f(z_0 + re^{it})| = |f(z_0)|$  kaikilla  $t$ . Muutoin olisi olemassa  $t_0$  siten, että pätee aito epäyhtälö  $|f(z_0 + re^{it})| < |f(z_0)|$  arvolla  $t = t_0$ . Mutta jatkuvuuden nojalla tämä pätee myös jollakin pienellä välillä, joka sisältää  $t_0$ :n, ja tällöin (8.29):ssa ensimmäinen  $\leq$  olisikin aito  $<$ , mikä on mahdotonta. Siis väite pätee.

Koska edellä  $r$  oli mielivaltainen säde väliltä  $(0, R)$ , päättelemme, että  $|f(z)| = |f(z_0)|$  kaikilla  $z \in D(z_0, R)$ . Lauseen 3.19 nojalla  $f$ :llä on vakioarvo  $c$  kiekossa  $D(z_0, R)$ . Yksikäsitteisyyslauseen (seuraus 8.22) perusteella  $f = c$  koko  $A$ :ssa.  $\square$

**8.30 Lause** (Maksimiperiaatteen vahva muoto). *Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen rajoitetussa alueessa  $A$  ja jatkuva sulkeumassa  $\bar{A}$ . Tällöin kaikilla  $z \in A$  pätee  $|f(z)| \leq \sup_{z \in \partial A} |f(z)|$ . Jos tässä yhtäsuuruus on voimassa jollain  $A$ :n pisteellä, niin  $f$  on vakio.*

*Todistus.* Oletetaan, että on olemassa piste  $z_0 \in A$  siten, että  $|f(z_0)| \geq M := \sup_{z \in \partial A} |f(z)|$ . Suljetussa ja rajoitetussa joukossa jatkuvana funktiona  $|f|$  saavuttaa maksiminsa  $\bar{A}$ :ssa, ja edellisen nojalla se saavutetaan jossain  $A$ :n pisteessä  $z_M$ . Tällöin  $z_M$  on lokaali maksimi, ja edellisen teoreeman nojalla  $f$  on vakiofunktio.  $\square$

Voimme soveltaa maksimiperiaatetta esimerkiksi seuraavasti.

**8.31 Lause** (Schwarzin lemma). *Olkoon  $D = D(0, 1)$  yksikkökierok. Oletetaan, että  $f$  on analyyttinen  $D$ :ssä.*

*i) Jos  $f(0) = 0$  ja  $|f(z)| \leq 1$  kaikilla  $z \in D$ , niin  $|f(z)| \leq |z|$  kaikilla  $z \in D$ .*

*ii) Jos meillä on yhtäsuuruus voimassa yhdelläkin pisteellä  $0 \neq z \in D$ , niin  $f$  on tason kierto, eli  $f(z) = e^{ia}z$  jollain  $a \in \mathbb{R}$ .*

*Todistus.* Olkoon  $0 < R < 1$ . Nyt kiekossa  $D(0, R)$  pätee

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

Koska  $f(0) = a_0 = 0$ , yhtälön (8.18) mukaan  $f(z) = z\varphi(z)$ , missä  $\varphi$  analyyttinen kiekossa  $D$ . Jos  $z \in D$  mielivaltainen, valitaan  $R$  siten, että  $|z| < R < 1$ . Nyt

$$|\varphi(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq \frac{1}{R}, \quad \text{kun } |z| = R,$$

joten maksimiperiaatteen (vahvan muodon) nojalla  $|\varphi(z)| \leq 1/R$ , kun  $|z| < R$ . Antamalla tässä  $R \rightarrow 1$  saamme  $|\varphi(z)| \leq 1$ , eli  $|f(z)| \leq |z|$ .

Jos tässä pätee yhtäsuuruus jollain  $z \in D$ , niin  $|\varphi(z)| = 1$ , ja siis maksimiperiaatteen nojalla  $\varphi(z) = e^{ia}$  jollain reaalilla  $a$ , eli  $f(z) = e^{ia}z$ .  $\square$

On syytä huomauttaa, että jouduimme soveltamaan maksimiperiaatetta kiekkoissa  $D(0, R)$  yksikkökiekon sijaan, koska emme tiedä että  $f$  on jatkuva koko yksikkökiekon sulkeumassa.

## 9 Cauchyn kaavan globaali muoto

Tämän luvun tarkoituksena on yleistää Cauchyn integraalilause ja -kaava alueisiin, jotka eivät välttämättä ole kiekkoja. Toisena tärkeänä tavoitteena on näyttää kuinka integrointia voidaan usein suuresti helpottaa muuntamalla integroitavia polkuja. Johdantona voisimme tarkastella esimerkiksi seuraavaa tapausta.

**9.1 Esimerkki.** Oletetaan, että on integroitava funktio

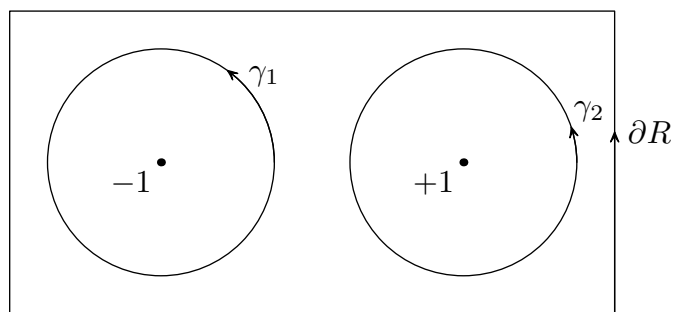
$$g(z) = \frac{2z}{z^2 - 1} = \frac{1}{z - 1} + \frac{1}{z + 1}$$

yli origokeskisen suorakulmion reunan  $\partial R$ , joka on vastapäivään suunnistettu. Olkoon suorakulmion leveys 5 ja korkeus 3.

Jos yritämme sijoittaa kyseiseen polkuintegraaliin suoraan  $\partial R$ :n jonkin parametrisoinnin, tarkasteltavan integraalin laskemisesta tulee hankalaa. Kompleksianalyysi antaa meille kuitenkin helpottavia työkaluja: Cauchyn integraalilauseen avulla integrointipolkua  $\partial R$  voidaan deformaoida. Itse asiassa osoitamme myöhemmin että

$$\int_{\partial R} g dz = \int_{\gamma_1} g dz + \int_{\gamma_2} g dz,$$

jossa  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  ovat kuten kuvassa alla (1-säteisiä ympyränkehiä, joiden keskipisteinä  $-1$  ja  $+1$ ).



Funktion  $g$  integrointi yli ympyröiden  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  onkin sitten helppoa: saadaan  $\int_{\gamma_1} g dz = \int_{\gamma_2} g dz = 2\pi i$  (mieti miksi), joten  $\int_{\partial R} g dz = 4\pi i$ .

Esimerkkimme osoittaa, paitsi että polkujen muuntaminen helpottaa integrointia, myös että usein on kätevää tarkastella yleisempää tilannetta, jossa yksittäisten polkujen sijasta integroidaan pitkin näiden kokoelmia! Siis yllä  $\partial R$ :n sijasta voidaan integroida polkujen  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  yhdistelmää, jota on tapana merkitä  $\gamma_1 + \gamma_2$ .

## Syklit ja integrointi

Ryhdyimme kehittämään eteenpäin edellä kuvattua ideaa umpinaisten polkujen yhdistelmistä. Paitsi että haluamme integroida useamman eri polun yli, voimme myös ottaa lukuun mahdollisuuden käyttää samaa polkua useasti; esimerkiksi  $2\gamma_1 + 5\gamma_2$  olisi kokoelma, jossa esiintyy kahdesti polku  $\gamma_1$  ja viidesti  $\gamma_2$ . Edelleen koska voimme tarvita myös vastapolkuja, otamme käyttöön myös negatiiviset kertoimet; siten kokoelmassa  $-3\gamma_1 + \gamma_2$  on polun  $\gamma_2$  lisäksi kolme kertaa vastapolku  $\gamma_1^{-1}$ , jota nyt merkitsemme myös  $-\gamma_1$ . Lopuksi voimme myös sopia, että  $0\gamma$ -tyyppisen termin lisääminen ei muuta kokoelmaa.

Kutsomme tällaisia umpinaisten polkujen kokoelmia *sykleiksi*. Yllä olevin tulkinnoin asetamme nyt seuraavat määritelmät:

**9.2 Määritelmä.** Jos  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$  ovat umpinaisia paloittain  $C^1$  polkuja kompleksitasossa ja  $n_1, n_2, \dots, n_k$  ovat kokonaislukuja, niin (formaalia) äärellistä summaa

$$(9.3) \quad \sigma = n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \dots + n_k\gamma_k$$

kutsutaan *sykliseksi*. Syklin  $\sigma$  jälki on

$$|\sigma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \dots \cup |\gamma_k|,$$

jossa polun  $\gamma_j: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  jälki on sen kuvajoukko  $|\gamma_j| = \{\gamma_j(t) : a \leq t \leq b\}$ .

Jos funktio  $f$  on jatkuva (ainakin joukossa  $|\sigma|$ ), niin määrittelemme

$$(9.4) \quad \int_{\sigma} f dz = \sum_{j=1}^k n_j \int_{\gamma_j} f dz.$$

Meille sykli (9.3) on siis (hieman epämääräisesti) kokoelma polkuja, jossa polku  $\gamma_j$  esiintyy  $n_j$  kertaa, jos  $n_j > 0$ , ja vastapolku  $-\gamma_j = \gamma_j^{-1}$  esiintyy  $-n_j$  kertaa, jos  $n_j < 0$ . Käsitteelle voisi antaa myös abstraktin ja täsmällisen matemaattisen sisällön, mutta tällä kurssilla se ei ole meille tarpeen.

Riittävää on, että syklin käsite tulee mielekkääksi ja konkreettiseksi integraalin määritelmän (9.4) kautta !

**9.5 Huomautus.** a) Yo. merkinnöin pätee  $\int_{\gamma^{-1}} f dz = \int_{-\gamma} f dz = -\int_{\gamma} f dz$ , joten integroitaessa negatiivisella kertoimella varustetut polut toimivat kuten pitääkin.

b) Yleisemmin syklin (9.3) *vastasykli* on  $-\sigma = -n_1\gamma_1 - n_2\gamma_2 - \dots - n_k\gamma_k$ , jolloin pätee  $\int_{-\sigma} f dz = -\int_{\sigma} f dz$ . Samoin luonnollisella tavalla voimme määritellä kahden syklin  $\sigma$  ja  $\tau$  summan  $\sigma + \tau$  ja erotuksen  $\sigma - \tau$ , jolloin  $\int_{\sigma \pm \tau} f dz = \int_{\sigma} f dz \pm \int_{\tau} f dz$  olettaen tietysti, että  $f$  on jatkuva kummankin syklin jäljellä.

c) Syklit  $\sigma$  ja  $\tau$  ovat *ekvivalentit*, mikäli  $\int_{\sigma} f dz = \int_{\tau} f dz$  kaikilla jatkuvilla funktioilla  $f$ . Pidemmälle sykliden teoriaa kehitettäessä tällaiset syklit pitäisikin samastaa jo määritelmässä.

d) Syklin (9.3) *pituus* on  $\ell(\sigma) = \sum_{j=1}^k |n_j| \ell(\gamma_j)$ , missä polun  $\gamma_j$  pituus  $\ell(\gamma_j)$  on kuten aikaisemmin (ks. kaava (7.7)). Tällöin, jos  $|f(z)| \leq M < \infty$  koko jäljellä  $|\sigma|$ , niin pätee (Miksi ?)

$$\left| \int_{\sigma} f(z) dz \right| \leq M \ell(\sigma).$$

### Polkujen ja syklien kierrosluvut

Seuraavana tavoitteenamme on selvittää miten polkuintegraalien avulla voimme laskea kuinka monta kertaa umpinainen polku tai sykli kiertää annetun pisteen ympäri. Aloitamme aputuloksella.

**9.6 Apulause.** *Olkoon  $A$  tason avoin osajoukko ja  $\gamma$  umpinainen paloittain  $C^1$ -polku  $A$ :ssa. Jos  $a \in A$  ei sijaitse käyrällä  $\gamma$ , niin integraalin*

$$n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z - a}$$

*arvo on aina kokonaisluku.*

*Todistus.* Oletetaan, että  $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$  on umpinainen polku ja tarkastellaan reaali-muuttujan funktiota

$$h(x) = \int_0^x \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Siis määritelmän mukaan  $h(1) = n(\gamma, a)2\pi i$ . Lukuunottamatta  $\gamma'$ :n epäjatkuvuuskohtia, joita on vain äärellinen määrä, pätee

$$h'(x) = \frac{\gamma'(x)}{\gamma(x) - a} \Rightarrow \gamma'(x) - h'(x)(\gamma(x) - a) = 0$$

Toisin sanoen,

$$\frac{d}{dx} [(\gamma(x) - a)e^{-h(x)}] = 0,$$

lukuunottamatta äärellistä määrää pisteitä. Koska  $\gamma$  ja  $h$  ovat jatkuvia, on funktio  $\varphi(x) = e^{-h(x)}(\gamma(x) - a)$  vakio, ja siten on oltava

$$\varphi(1) = \varphi(0) = \gamma(0) - a,$$

eli

$$e^{h(1)} = \frac{\gamma(1) - a}{\gamma(0) - a} = 1,$$

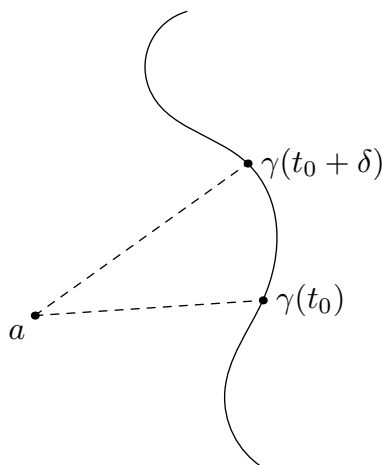
sillä  $\gamma$  on umpinainen. Näin ollen  $h(1) = 2n\pi i$  jollain  $n \in \mathbb{Z}$ . Tämä on lauseen väite.  $\square$

Miten apulauseen antama tulos tulisi tulkita ?

Tulkintaa varten, olkoon  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow A$  edellisen lemmän polku ja  $t_0 \in [\alpha, \beta]$ . Koska oletuksen mukaan  $a \notin \gamma[\alpha, \beta]$ , ovat logaritmin haarat  $z \mapsto \log(z - a)$  hyvin määritellyjä ja jatkuvia pisteen  $\gamma(t_0)$  jossakin pienessä ympäristössä. Siten myös

$$(9.7) \quad t \mapsto \arg(\gamma(t) - a) = \text{Im} \log(\gamma(t) - a)$$

ovat hyvin määriteltyjä ja jatkuvia, kun  $|t - t_0| < \delta$  riittävän pieni, ks. kuva alla.



Tässä  $\arg(\gamma(t) - a)$  on annettu vain  $2\pi$ :n monikertaa vaille, mutta yhtälön (9.7) nojalla

$$\frac{d}{dt} \arg(\gamma(t) - a) = \operatorname{Im} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a}$$

ja tämä on siis logaritmin haaran valinnasta riippumaton. Havaitaan, että

$$\operatorname{Im} \int_{t_0}^{t_0+\delta} \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - a} dt = \operatorname{Im} \int_{\gamma[t_0, t_0+\delta]} \frac{1}{z - a} dz$$

on argumentin muutos *pisteen a suhteen*, kun kuljemme pitkin polkua  $\gamma$  pisteestä  $\gamma(t_0)$  pisteeseen  $\gamma(t_0 + \delta)$ . Lisäksi, argumentin *muutos* on logaritmin haarasta riippumaton, niinkuin pitää ollakin.

Yhteenvetona, täyden integraalin  $\int_{\gamma} (z - a)^{-1} dz$  imaginääriosaa mittaa argumentin kokonaisuutosta pisteen  $a$  suhteen, kuljettaessa pitkin käyrää  $\gamma$ !

Toisaalta, kun kierrämme yli umpinaisen polun  $\gamma$ , argumentin muutos jokaisen pisteen suhteen tulee aina olla (jokin)  $2\pi$ :n monikerta. Lemman 9.11 mukaan näin todella on, ja lisäksi, voimme tarkastella suoraan suuretta  $n(\gamma, a)$ . Asetetaan siis

**9.8 Määritelmä.** Luku  $n(\gamma, a)$  on umpinaisen paloittain  $C^1$ -käyrän  $\gamma$  *kierrosluku* pisteen  $a$  suhteen.

Syklin  $\sigma$  kierrosluku määritellään tietysti analogisesti; asetamme

$$(9.9) \quad n(\sigma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{dz}{z - a}, \quad \text{kun } a \notin |\sigma|.$$

Saatu suure (9.11) kertoo nyt täsmälleen, kuinka monta kertaa polku  $\gamma$  tai sykli  $\sigma$  kiertää pisteen  $a$  ympäri (ja mihin suuntaan). Katsotaanpa tätä esimerkkien avulla.

**9.10 Esimerkki.** (i) Olkoon ensin  $a = 0$  ja  $\gamma(t) = re^{2\pi it}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Siis  $\gamma$  on positiivisesti suunnistettu origo-keskisen  $r$ -säteisen ympyrän kehä. Kierrosluvun pitäisi olla yksi. Lasketaan:

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi i r e^{2\pi it}}{r e^{2\pi it}} dt = 1.$$

(ii) Kierretään nyt origo toisin päin: olkoon  $\gamma^{-1}(t) = e^{-2\pi it}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Olennaisesti samalla laskulla kuin kohdassa (i) nähdään, että  $n(\gamma^{-1}, 0) = -1$ .

(iii) Olkoon sitten  $\gamma$  kuten kohdassa (i), mutta  $a = 2$ . Piste 2 on käyrän  $\gamma$  ulkopuolella, joten kierrosluvun pitäisi olla nolla. Cauchyn integraalilauseen 7.20 nojalla näin todella on.

(iv) Olkoon lopuksi  $a = 0$  ja  $\gamma(t) = e^{i2\pi mt}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , missä  $m \in \mathbb{Z}$ . Nyt argumentin muutos on  $2\pi im$ , eli kierrosluvun pitäisi olla  $m$ . Laskemalla saadaan

$$n(\gamma, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^1 \frac{2\pi m i e^{2\pi i t}}{e^{2\pi i t}} dt = m.$$

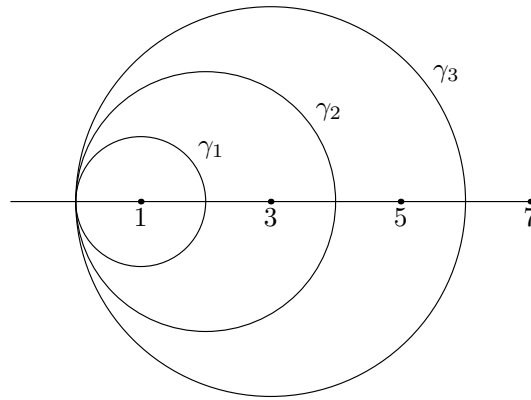
(v) Huomaa, että jokaiselle syklille ja pisteelle  $a \notin |\sigma|$  on  $n(-\sigma, a) = -n(\sigma, a)$ . Edelleen, jos

$$\sigma = n_1 \gamma_1 + \cdots + n_k \gamma_k$$

niin  $\sigma$ :n kierrosluku saadaan summaamalla  $\gamma_j$ :den kierrosluvuista,

$$n(\sigma, a) = n_1 n(\gamma_1, a) + \cdots + n_k n(\gamma_k, a), \quad a \notin |\sigma|.$$

(vi) Olkoon  $\sigma = \gamma_1 - 2\gamma_2 + 3\gamma_3$  missä  $\gamma_j$  on ympyrän kehä, keskipisteenä ja säteenä  $j$ . Siten  $\gamma_j(t) = j + j e^{2\pi i t}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , ks. kuva alla.



Tällöin  $n(\sigma, 1) = 1 - 2 + 3 = 2$ ,  $n(\sigma, 3) = -2 + 3 = 1$ ,  $n(\sigma, 5) = 3$  ja  $n(\sigma, 7) = 0$ .

Seuraava lause kertoo kierrosluvun yleiset perusominaisuudet, kun pidämme syklin  $\sigma$  annettuna ja annamme pisteen  $a$  varioida, ts. tutkimme funktiota  $a \mapsto n(\sigma, a)$  avoimessa joukossa  $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ .

Tässä yhteydessä on syytä palauttaa mieleen topologiasta, että avoin joukko  $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$  jakautuu maksimaalisiin yhtenäisiin osajoukkoihin, joita kutsutaan  $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ :n (yhtenäisiksi) komponenteiksi. Avoimen joukon komponentit ovat avoimia, ja yhtenäisinä ne ovat siis alueita. (Ks. luvun 2 loppua.) Koska syklin  $\sigma$  jälki  $|\sigma|$  on aina rajoitettu joukko (mietä miksi!), on olemassa niin suuri säde  $R > 0$ , että joukko  $\{z : |z| > R\}$ , joka on yhtenäinen, ei kohtaa  $|\sigma|$ :aa. Siten  $\{z : |z| > R\}$  sisältyy yhteen joukon  $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$

komponenteista. Tämä on ainoa rajoittamaton komponentti, sillä muut komponentit sisältyvät kiekkoon  $\overline{D}(0, R)$ .

**9.11 Lause.** *Olkoon  $\sigma$  sykli tasossa  $\mathbb{C}$ . Silloin*

- i) *Kuvaus  $a \mapsto n(\sigma, a)$  on vakio jokaisessa joukon  $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$  komponentissa.*
- ii)  *$n(\sigma, a) = 0$  joukon  $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ :n rajoittamattomassa komponentissa.*

*Todistus.* i) Ensinnäkin kuvaus

$$(9.12) \quad a \mapsto n(\sigma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - a}$$

on jatkuva joukossa  $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ . Nimittäin, jos  $a_0 \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|$ , olkoon  $\delta > 0$  pisteen  $a_0$  etäisyys jäljestä  $|\sigma|$ . Jos jonolle  $a_j \rightarrow a_0$ , niin riittävän suurilla indekseillä  $j$ ,

$$\left| \frac{1}{\zeta - a_j} - \frac{1}{\zeta - a_0} \right| \leq \frac{|a_j - a_0|}{|\zeta - a_j||\zeta - a_0|} \leq \frac{2}{\delta^2} |a_j - a_0| \rightarrow 0$$

ja siis konvergenssi on tasaista  $\zeta$ :n suhteen. Harjoitus 10/tehtävän 6 nojalla nyt  $n(\sigma, a_j) \rightarrow n(\sigma, a_0)$  kun  $j \rightarrow \infty$ , ja tästä jatkuvuus seuraa.

Toisaalta, koska  $n(\sigma, a)$ :n arvot ovat kokonaislukuja, jatkuvuuden nojalla täytyy  $n(\sigma, a)$ :n olla lokaalisti vakio. Tai, jos  $A \subset \mathbb{C} \setminus |\sigma|$  on alue ja  $a_1, a_2 \in A$ , niin löydämme murtoviivan joka yhdistää nämä pisteet  $A$ :ssa ja jatkuvuuden nojalla  $n(\sigma, a)$  ei voi murtoviivaa pitkin kuljettaessa muuttua (kokonaisluku)arvoaan. On siis on välttämättä  $n(\sigma, a_1) = n(\sigma, a_2)$ , eli kierrosluku  $n(\sigma, a)$  on vakio kussakin komponentissa  $A$ .

ii) Jälki  $|\sigma|$  on rajoitettu (Miksi ?) joten kun  $a \rightarrow \infty$ , nähdään että identiteetin (9.12) integraali  $\rightarrow 0$ . Koska  $n(\sigma, a)$  on kokonaisluku, on siis  $n(\sigma, a) = 0$  suurilla  $a$ . Edellisen nojalla se häviää koko rajoittamattomassa komponentissa.  $\square$

Lausetta 9.11 on hyvä verrata vaikkapa Esimerkin 9.10 kohdan (vi) sykliin  $\sigma$ : Koska piste  $a = 7$  on kaikkien kiekkojen ulkopuolella, se on syklin komplementin rajoittamattomassa komponentissa, ja siis  $n(\sigma, 7) = 0$ .

### Globaali Cauchyn lause ja sovelluksia

Olemme nyt valmiit Cauchyn integraalilauseen ja -kaavan globaaleihin versioihin.

**9.13 Lause** (Cauchyn lause ja kaava). *Olkoon  $A \subset \mathbb{C}$  alue sekä ja  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  analyyttinen. Olkoon  $\sigma$  sellainen sykli  $A$ :ssa (ts.  $|\sigma| \subset A$ ), jolle*

$$(9.14) \quad n(\sigma, a) = 0 \quad \text{kaikilla } a \in \mathbb{C} \setminus A.$$

*Tällöin*

$$(9.15) \quad n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in A \setminus |\sigma|,$$

*ja*

$$(9.16) \quad \int_{\sigma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$



Huomaa, että tämä tulos on voimassa kaikissa alueissa ja kaikille analyyttisille funktioille  $f$ . Ainoa rajoitus koskee sykliä  $\sigma$ , jonka yli integroidaan: sen kierrosluvun on oltava 0 jokaisen alueen ulkopuolisen pisteen suhteen. Tämä tarkoittaa sitä, että mikäli  $A$ :ssa on ”reikiä”,  $\sigma$ :n (kokonais)kierrosluku niiden suhteen on nolla.

Esitämme lauseen 9.13 todistuksen hieman myöhemmin; katsomme ensin esimerkkien avulla mitä lause kertoo, ja mitä siitä (välittömästi) seuraa. Huomataan kuitenkin heti, että kaava (9.16) seuraa helposti kaavasta (9.15): valitaan nimittäin kiinteä piste  $z \in A \setminus |\sigma|$  ja tarkastellaan apufunktiota  $F(\zeta) = f(\zeta)(\zeta - z)$ . Silloin (9.15):n mukaan

$$0 = F(z)n(\sigma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{F(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} f(\zeta) d\zeta,$$

joten (9.16) on voimassa.

**9.17 Esimerkki.** a) Olkoon  $A = D(z_0, R)$  kiekko. Silloin Lauseen 9.11 viimeisen väitteen mukaan  $n(\sigma, a) = 0$  aina kun  $a \notin D(z_0, R)$  ja  $\sigma$  on mikä tahansa sykli  $A$ :ssa. Näin ollen Cauchyn integraalikaavan lokaali muoto eli lause 8.1 seuraa lauseesta 9.13.

b) Olkoon  $A = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  punkteerattu taso. Nyt ehto (9.14) vaatii, että  $n(\sigma, 0) = 0$ . Tällaisten syklien tapauksessa kaavat (9.15) ja (9.16) pätevät mille tahansa analyyttiselle funktiolle  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ .

Toisaalta näemme, että oletus  $n(\sigma, 0) = 0$  on välttämätön: jos nimittäin  $\gamma(t) = e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ , on yksikköympyrän kehän parametointi, niin  $n(\gamma, 0) = 1$  ja  $\int_{\gamma} z^{-1} dz = 2\pi i$ , vaikka funktio  $z \mapsto z^{-1}$  onkin analyyttinen  $A$ :ssa.

c) Olkoon  $A$  alue ja kiekko  $D = D(z_0, R)$ , jolle  $\bar{D} \subset A$ . Jos sykli  $\sigma = 3\partial D$ , niin

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 3 \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 3f(z), \quad z \in D(z_0, R),$$

missä viimeisessä yhtälössä käytimme lokaalia Cauchyn integraaliesitystä, Lausetta 8.1. Mutta  $n(\sigma, z) = 3$  jokaisella  $z \in D(z_0, R)$ ; havaitaan siis, että kierroslukutekijä  $n(\sigma, z)$  on välttämätön yhtälössä (9.15).

Globaalilla Cauchyn lauseella on seuraava erittäin hyödyllinen seuraus.

**9.18 Seuraus** (Polkujen deformaatio). *Olkoon  $f$  analyyttinen alueessa  $A \subset \mathbb{C}$ , ja olkoot  $\sigma$  ja  $\tau$  syklejä  $A$ :ssa siten, että*

$$n(\sigma, a) = n(\tau, a) \quad \text{kaikilla } a \in \mathbb{C} \setminus A.$$

*Silloin*

$$\int_{\sigma} f dz = \int_{\tau} f dz.$$

*Todistus.* Syklille  $\sigma - \tau$  pätee  $n(\sigma - \tau, a) = n(\sigma, a) - n(\tau, a) = 0$  kaikilla  $a \in \mathbb{C} \setminus A$ . (Ks. myös huomautus 9.5b.) Siten lauseen 9.13 nojalla

$$0 = \int_{\sigma - \tau} f dz = \int_{\sigma} f dz - \int_{\tau} f dz,$$

mistä väite seuraa. □

Polkuintegraalia laskettaessa saadaan siis deformaoida integroimispolkua tai -sykliä mielivaltaisesti, kunhan vain pidetään huoli siitä, että kierrosluku alueen ulkopuolisten pisteiden (mahdollisten ”reikien”) suhteen pysyy samana!

**9.19 Esimerkki.** Palaamme esimerkkiin 9.1. Siinä integroitavana oli funktio  $g(z) = 2z/(z^2 - 1)$  yli suorakulmion reunan  $\partial R$ , joka on vastapäivään suunnistettu. Funktio  $g$  on analyyttinen alueessa  $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ , ja ilmeisestikin  $n(\partial R, +1) = n(\partial R, -1) = 1$ .

Toisaalta jos  $\gamma_1$  ja  $\gamma_2$  ovat ympyränkehät kuten esimerkissä 9.1 (keskipisteinä vastaavasti  $-1$  ja  $+1$ , säteenä  $1$ ), niin syklille  $\sigma = \gamma_1 + \gamma_2$  pätee samoin  $n(\sigma, +1) = n(\sigma, -1) = 1$ . Niinpä deformaatioon 9.18 perusteella

$$\int_{\partial R} g dz = \int_{\sigma} g dz = \int_{\gamma_1} g dz + \int_{\gamma_2} g dz.$$

Tässä

$$\int_{\gamma_1} g dz = \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-1} dz + \int_{\gamma_1} \frac{1}{z+1} dz = 0 + 2\pi i = 2\pi i,$$

mikä nähdään suoralla laskulla (kun  $\gamma_1(t) = -1 + e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ ) tai sitten vetoamalla ensimmäisen integraalin osalta Cauchyn integraalilauseen perusversioon ja toisen osalta Cauchyn integraalikaavaan kiekossa. Samoin nähdään että  $\int_{\gamma_2} g dz = 2\pi i$ , ja siis saamme lopulta  $\int_{\partial R} g dz = 4\pi i$ , kuten aiemmin väitimme.

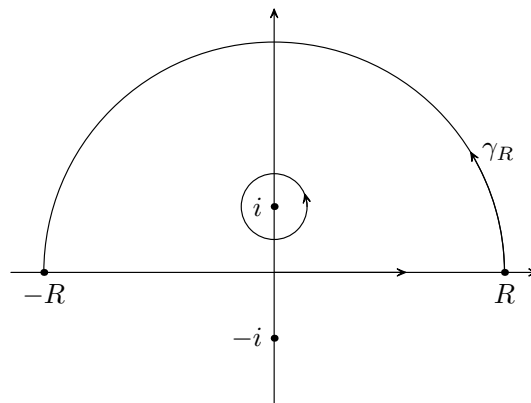
**9.20 Esimerkki.** On laskettava  $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 1}$ .

Tämä integraali voidaan tunnetusti laskea reaalisen differentiaali- ja integraalilaskennan keinoin (tuloksena on  $\pi$ ), mutta esitämme tässä kompleksianalyttisen menetelmän, jota voidaan käyttää hyvin yleisissä tilanteissa. Ideana on jatkaa integroitava kompleksiseksi funktioksi

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

ja soveltaa siihen polkuintegraalimetodeja. Tämä voidaan jakaa kolmeen askeleeseen:

*Askel 1.* Valitaan  $R > 0$  (suuri) sekä integroitava umpinainen polku  $\gamma_R$ , joka on puoliympyrän reuna, jota voisimme merkitä  $\gamma_R = [-R, R] * \eta_R$ , jossa  $\eta_R(t) = Re^{it}$ , kun  $0 \leq t \leq \pi$ ; ks. kuva alla. (Käytimme tässä luvun 7 merkintätapaa tulopolulle, koska kyse ei ollut umpinaisten polkujen yhdistämisestä.)



*Askel 2.* Sovelletaan sitten polkujen deformaatioita. Funktio  $f$  on analyyttinen alueessa  $\mathbb{C} \setminus \{\pm i\}$ , mutta polun  $\gamma_R$  rajoittaman alueen sisällä on  $f$ :n navoista vain  $i$ . Olkoon siksi  $\sigma = \partial D(i, r)$  positiivisesti suunnistettu ympyrän kehä, keskipisteenä  $i$  ja säteenä  $r < 1$ ; ks. kuva yllä. Silloin  $n(\gamma_R, i) = n(\sigma, i) = 1$  ja  $n(\gamma_R, w) = n(\sigma, w) = 0$  kaikissa pisteissä  $w \in \gamma_R$ :n ”ulkopuolella”, erityisesti pisteessä  $w = -i$ . Siis seurauksen 9.18 ja Cauchyn kaavan mukaan

$$(9.21) \quad \int_{\gamma_R} f dz = \int_{\sigma} f dz = \int_{\partial D(i, r)} \frac{1/(z+i)}{z-i} dz = 2\pi i \left( \frac{1}{i+i} \right) = \pi$$

*Askel 3.* Arvioidaan lopuksi polkuintegraalia

$$(9.22) \quad \int_{\gamma_R} f dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\eta_R} f(z) dz,$$

kun  $R \rightarrow +\infty$ . Tällöin  $\int_{-R}^R f(x) dx \rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = I$  kun taas

$$\left| \int_{\eta_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^\pi \frac{Rie^{it}}{R^2 e^{i2t} + 1} dt \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{R^2 - 1} dt = \frac{\pi R}{R^2 - 1} \rightarrow 0.$$

Siispä kaavoista (9.21) ja (9.22) seuraa, kun  $R \rightarrow +\infty$ , että  $I = \pi$ .

### Yhdesti yhtenäiset alueet

Yleisessä kompleksitason alueessa globaali Cauchyn lause 9.13 toimii vain niille sykleille, joiden kierrosluku alueen ulkopuolisten pisteiden suhteen häviää (ehto (9.14)). Mutta eräillä alueilla tämä ehto on aina voimassa!

**9.23 Määritelmä.** Alue  $A \subset \mathbb{C}$  on *yhdesti yhtenäinen*, jos  $n(\gamma, w) = 0$  jokaisella  $A$ :n umpinaisella paloittain  $C^1$  polulla  $\gamma$  ja jokaisella  $w \in \mathbb{C} \setminus A$ .

Havainnollisesti tämä siis merkitsee, että alueessa  $A$  ei ole ”reikiä”, jotka voisi umpinaisilla poluilla ”kiertää”. Jokainen kiekko on yhdesti yhtenäinen; tämä seuraa jo Cauchyn integraalilauseen perusversiosta 7.20 (miten?). Muita yhdesti yhtenäisiä alueita ovat vaikkapa jokainen avoin suorakulmio tai puolitaso tai yleisemmin jokainen *konvekssi* alue (ks. määritelmä 2.21c). Tämä tulos on havainnollisesti ilmeinen (piirrä kuva ja tutki); sivuutamme tarkan todistuksen.

Seuraava kriteeri seuraa helposti Lauseesta 9.11: Olkoon  $A \subset \mathbb{C}$  rajoitettu alue. Jos alueen komplementti  $\mathbb{C} \setminus A$  on yhtenäinen (eli sillä on vain yksi komponentti, joka on rajoittamaton), niin  $A$  on yhdesti yhtenäinen.

Cauchyn lause saa yhdesti yhtenäisissä alueissa seuraavan yleisen muotoilun.

**9.24 Lause.** *Olkoon  $A \subset \mathbb{C}$  yhdesti yhtenäinen alue ja  $f: A \rightarrow \mathbb{C}$  analyyttinen. Tällöin jokaiselle syklille  $\sigma$   $A$ :ssa pätee*

$$n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in A \setminus |\sigma|,$$

ja

$$\int_{\sigma} f(\zeta) d\zeta = 0.$$

### Cauchyn lauseen 9.13 todistus

Edellä esitettyjen tulosten, selitysten ja esimerkkien valossa nähdään, että Lauseeseen 9.13 koottu Cauchyn lauseen ja Cauchyn kaavan globaalit versiot muodostavat vahvan ja monipuolisen työkalun monessa tilanteessa. Lisäksi lauseen formulointiin on pakattu huomattava määrä informaatiota. Enää puuttuvat lauseen perustelut.

Oletamme siis, että  $f$  on alueessa  $A$  analyyttinen ja  $\sigma$  on sellainen sykli  $A$ :ssa, joka toteuttaa kierroslukuehdon (9.14). Totesimme jo aikaisemmin, että riittää todistaa kaava (9.15).

Päätelyn perusidea on samankaltainen kuin todistettaessa Cauchyn kaavaa kiekossa (lause 8.1), mutta nyt tarkastelemme kuvausta  $F: A \times A \rightarrow \mathbb{C}$  kahden muuttujan funktiona,

$$(9.25) \quad F(z, \zeta) = \begin{cases} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z}, & \zeta \neq z, \\ f'(z) = f'(\zeta), & \zeta = z. \end{cases}$$

Panemme merkille, että jos  $z \in A \setminus |\sigma|$ , silloin

$$(9.26) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} F(z, \zeta) d\zeta &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \cdot \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z)n(\sigma, z). \end{aligned}$$

Tulee siis osoittaa, että tämä lauseke häviää identtisesti. Tätä tavoitetta varten tutkimme kahta eri funktiota:

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} F(z, \zeta) d\zeta, \quad z \in A,$$

ja

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|.$$

Osoitamme, että näistä funktioista voidaan ”liimaamalla” rakentaa funktio, joka on analyyttinen koko  $\mathbb{C}$ :ssä ja lähestyy nollaa, kun  $|z| \rightarrow \infty$ . Tällöin Liouvilin lause pakottaa funktion identtisesti nolaksi. Jotta ”liimaaminen” onnistuisi, tarvitsemme kierroslukuehtoa (9.14).

Näiden ideoiden toteuttaminen vaatii monta askelta ja huolellista analyysiä.

**Vaihe 1.** Osoitetaan, että kaavan (9.25) funktio  $F: A \times A \rightarrow \mathbb{C}$  on jatkuva.

Riittää osoittaa jatkuvuus diagonaalipisteissä  $(a, a) \in A \times A$ . Koska seurauslauseen 8.11 mukaan  $f'$  on analyyttinen, se on jatkuva. Siten riittävän pienillä  $\delta > 0$  on  $|f'(w) - f'(a)| \leq \epsilon$ , kunhan  $w \in D(a, \delta) \subset A$ . Lisäksi, jos  $z, \zeta \in D(a, \delta)$ , saadaan

$$f(\zeta) - f(z) = \int_{[z, \zeta]} f'(w) dw = (\zeta - z) \int_0^1 f'((1-t)z + t\zeta) dt$$

Siten kaikilla  $z, \zeta \in D(a, \delta)$  pätee

$$|F(z, \zeta) - F(a, a)| = \left| \int_0^1 [f'((1-t)z + t\zeta) - f'(a)] dt \right| \leq \epsilon.$$

Tämä todistaa  $F$ :n jatkuvuuden.

**Vaihe 2.** Edellisen mukaan, eli  $F$ :n jatkuvuuden nojalla, integroimalla saatu funktio

$$h(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} F(z, \zeta) d\zeta, \quad z \in A,$$

on hyvin määritelty. Osoitamme sitten, että  $h$  on jatkuva.

Olkoon  $a \in A$ , ja oletetaan, että  $a_n \rightarrow a$   $A$ :ssa. Tarvitsemme topologiasta tiedon: jokainen kompaktin joukon jatkuva funktio on tasaisesti jatkuva.<sup>1</sup> Sovellamme tätä funktioon  $F$  joukossa  $\overline{D}(a, \delta) \times |\sigma|$ , jolloin näemme, että

$$\sup\{|F(a_n, \zeta) - F(a, \zeta)| : \zeta \in |\sigma|\} \rightarrow 0.$$

Koska funktioiden tasainen suppeneminen takaa polkuintegraalien suppenemisen (Harjoitukset 10, tehtävä 6), tästä seuraa  $h(a_n) \rightarrow h(a)$ . Koska sekä piste  $a$  että jono  $(a_n)$  olivat mielivaltaisia  $A$ :ssa,  $h$  on jatkuva  $A$ :ssa.

**Vaihe 3.** Osoitamme, että  $h$  on analyyttinen alueessa  $A$ .

Olkoon  $D(a, r) \subset A$  mielivaltainen kiekko sekä  $\gamma$  umpinainen paloittain  $C^1$  polku  $D(a, r)$ :ssä. Silloin

$$\int_{\gamma} h(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \left( \int_{\gamma} F(z, \zeta) dz \right) d\zeta.$$

Tässä olemme vaihtaneet integrointijärjestystä. Se on mahdollista, koska  $F$  on jatkuva ja myös  $\sigma$  ja  $\gamma$  voidaan olettaa jatkuvasti derivoituviksi (miksi?), jolloin voimme käyttää parametriesityksiä ja tietoa, että integroitaessa kahden reaaliuuttujan jatkuvaa funktiota suljetussa suorakulmiossa integrointijärjestys on vaihdettavissa.<sup>2</sup>

Koska funktio  $z \mapsto F(z, \zeta)$  on analyyttinen alueessa  $A \setminus \{\zeta\}$  ja jatkuva myös  $\zeta$ :ssa (vaihe 1), Cauchyn integraalilauseen yleistysten 8.4 nojalla  $\int_{\gamma} F(z, \zeta) dz = 0$ . Niinpä  $\int_{\gamma} h(z) dz = 0$ . Nyt Moreran lauseesta (seuraus 8.15) nähdään, että  $h$  on analyyttinen kiekossa  $D(a, r)$ . Koska tämä oli mielivaltainen kiekko  $A$ :ssa, väite on todistettu.

**Vaihe 4.** Osoitetaan, että funktio

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|,$$

on analyyttinen koko määrittelyjoukossaan.

Tutkimme erotusosamäärää. Olkoon  $z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma|$  kiinteä, ja valitaan kiekko  $D(z, r) \subset \mathbb{C} \setminus |\sigma|$ . Kun  $0 < |h| < r$ , voimme kirjoittaa (tarkista!)

$$\frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z - h)} d\zeta.$$

Kun  $h \rightarrow 0$ , on helppoa osoittaa, että integroitava lähestyy funktiota  $f(\zeta)/(\zeta - z)^2$  tasaisesti pisteiden  $\zeta \in |\sigma|$  suhteen (harjoitustehtävä). Siten

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(z+h) - g(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta.$$

Tämä osoittaa, että  $g$  on analyyttinen. (Vaihtoehtoinen tapa olisi ollut matkia lauseen 8.7 todistusta ja kehittää  $g$  lokaalisti potenssisarjaksi.)

<sup>1</sup>Ks. esim. J. Väisälä: *Topologia I*, Limes ry (3. korj. p. 2004), lause 13.36.

<sup>2</sup>Ks. esim. O. Martio: *Vektorianalyysi*, Limes ry (2. korj. p. 2008), lause 4.1.6.

**Vaihe 5.** Olkoon

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} \setminus |\sigma| : n(\sigma, z) = 0\}.$$

Tämä on avoin joukko, ja kierroslukuehdon (9.14) nojalla  $\mathbb{C} \setminus A \subset \Omega$ . Toisin sanoen  $\mathbb{C} = A \cup \Omega$ . Jos  $z \in \Omega \cap A$ , silloin sekä  $h(z)$  että  $g(z)$  ovat määriteltyjä ja kaavasta (9.26) nähdään, että  $h(z) = g(z) - f(z)n(\sigma, z) = g(z)$ . Näin ollen

$$H(z) = \begin{cases} h(z), & z \in A, \\ g(z), & z \in \Omega, \end{cases}$$

on hyvin määritelty analyyttinen funktio koko  $\mathbb{C}$ :ssä.

**Vaihe 6.** Osoitetaan, että apufunktio  $H$  häviää identtisesti. Koska  $h = H$  alueessa  $A$ , tämä todistaa lauseemme, kuten jo kaavan (9.26) yhteydessä todettiin!

Kun  $|z|$  on kyllin suuri,  $z$  kuuluu joukon  $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$  rajoittamattomaan komponenttiin ja siten joukkoon  $\Omega$  (apulause 9.11). Tällöin

$$|H(z)| = |g(z)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \right| \leq \frac{M\ell(\sigma)}{2\pi(|z| - R)} \rightarrow 0,$$

kun  $|z| \rightarrow +\infty$ . Tässä vakiot  $R$  ja  $M$  oli valittu siten, että  $|\sigma| \subset D(0, R)$  ja  $|f(\zeta)| \leq M$  kaikilla  $\zeta \in |\sigma|$ ; tämä oli mahdollista  $|\sigma|$ :n kompaktisuuden ja  $f$ :n jatkuvuuden takia.

Näemme nyt, että  $H$  on rajoitettu (vrt. päättely algebran peruslauseen 8.26 todistuksessa) koko  $\mathbb{C}$ :ssä. Niinpä Liouvilin lause 8.25 (a) kertoo, että  $H$  on vakio. Koska  $H(z) \rightarrow 0$ , kun  $|z| \rightarrow +\infty$ , kyseinen vakio on 0.

Olemme näin saaneet todistettua globaalin Cauchyn kaavan.

**9.27 Huomautus.** Esittämämme muotoilu globaalille Cauchyn lauseelle ja kaavalle on ns. *homologinen* versio tästä tuloksesta. Lauseelle on olemassa myös polkujen *homotopiaan* (eli ”jatkuvaan deformaatioon”) perustuva versio, joka on mm. Lehdon monisteessa. Homologinen lähestymistapa on kuitenkin monesti selkeämpi, tehokkaampi ja joustavampi. Esittämämme todistus lauseelle 9.13 noudattelee Rudinin oppikirjan mallia.

# 10 Kertauksen tiivistelmä

Viimeisellä luennolla keskiviikkona 11.12. kerrattiin lyhyesti toisen kurssikokeen materiaali ja tulosten pääkohdat. Tässä kertauksen tiivistelmä.

## Luku 6 Konformikuvaukset

6.1. Kulmien säilyminen,

6.2. Riemannin pallo

Analyttisyys  $\infty$ :ssä, Rationaalifunktiot ja  $z$ :n polynomit

6.3 Möbiuskuvaukset

Muodostavat ryhmän, kaksoisuhde, kuvaustehtävät, suorat ja ympyrät,

6.4. Konformikuvaustehtävät; (nyt halutaan että kuvaukset bijektioita !)

Löydettyjä konformikuvauksia:  $e^z$ ,  $\ln z$ ,  $z^\alpha$  ja Möbiuskuvaukset  
*sekä* niiden yhdisteet.

(missä alueessa kukin on konformikuvaus/bijektio ?!)

## Luku 7 Kompleksinen integrointi

### 7.1. Integrointi polkujen yli

$\int f = \int u + i \int v$ , polkuintegraalit, integrointi kaaren pituuden suhteen.

$$\int_{\partial D(a,r)} \frac{1}{(z-a)^n} dz = \dots$$

Paloittain  $C^1$ -polut, vastapolut, polkujen tulot, Integraalilaskennan kolmio-ey:

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f| |dz| \leq M \ell(\gamma).$$

Kun  $f_n \rightarrow f$  tasaisesti  $|\gamma|$ :lla,

$$\int_{\gamma} f_n(z) dz \rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{kun } n \rightarrow \infty.$$

### 7.2. Integraalifunktiot.

Vakiota vaille yksikäs., olemassa  $\Leftrightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = 0$  suljetuilla  $\gamma$ .

Koska funktiolla  $1/z$  on integraalifunktio!? Tai fkt:lla  $\frac{1}{z-a}$  ?

### 7.3 Cauchyn lause kiekossa (= lokaali versio).

aputulos: Goursat'n lemma.

Kun  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  analyyttinen,  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  kiekon  $D$  suljetuilla poluilla.

Yleistys: Riittää  $f : D \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  analyyttinen ja  $f : D \rightarrow \mathbb{C}$  jatkuva (!)

## Luku 8 Cauchyn kaava ja sen seurauksia.

### 8.1 Lokaali integraalikaava

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D(z_0, r).$$

### 8.2 Kiekossa $D = D(z_0, r)$ analyyttisen funktion potenssisarjakehitelmät:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n, \quad z \in D(z_0, r); \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta-z_0|=\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \rho < r.$$

$f : A \rightarrow \mathbb{C}$  analyyttinen  $\Leftrightarrow f'$  analyyttinen;  $f^{(n)}(z) = \dots$

$f : D \rightarrow \mathbb{C}$  analyyttinen  $\Leftrightarrow f$ :llä integraalifunktio.

Moreran lause !

### 8.3 Liouvilien lause

Cauchyn arvio kertoimille, polynominen kasvu, Algebran peruslause,

### 8.4 Analyyttisen funktion nollakohdat; yksikäsitteisyys.

### 8.5 Maksimiperiaate (rajoitetussa ! alueessa), Schwarzin lemma.



## Luku 9 Globaali Cauchyn lause

9.1 Kierrosluvut, syklit,

Kierrosluku vakio  $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$ :n komponenteissa.

Kierrosluku  $\equiv 0$  joukon  $\mathbb{C} \setminus |\sigma|$  rajoittamattomassa komponentissa.

9.2 Globaali Cauchyn lause ja Cauchyn kaava.

(muotoilu !)

$$n(\sigma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in A \setminus |\sigma|,$$

kun  $n(\sigma, w) = 0$  kaikilla  $w \in \mathbb{C} \setminus A$ .

Polkujen deformaatio.

sovellukset integrointiin.

Yhdesti yhtenäiset alueet.

Esimerkiksi, selvitä itsellesi:

$$\int_{\partial D(a,r)} \frac{1}{(z-w)^n} dz = \dots? \quad w \notin \partial D(a,r)$$

**YHTEENVETONA:** Analyttiset funktiot  $f$  kiekkoissa voidaan karakterisoida kuu-  
della eri tavalla:

- i) Kompleksinen derivaatta  $f'$  olemassa joka pisteessä (analyttisyyden määritelmä)
- ii) Cauchy-Riemannin yhtälöt pätevät  $u$ :lle ja  $v$ :lle, kun  $f = u + iv$
- iii)  $f$ :llä suppeneva potenssisarja-esitys
- iv)  $f$ :llä integraalifunktio
- v)  $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$  kiekon suljetuilla poluilla
- vi)  $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \in D(z_0, r)$ .