Ohjeita luvun I.4 tehtäviin

Yleistä:

- Tehtävät 7–8 on muotoiltu niin yleisesti, että niistä on vaikea saada kiinni. Ne voi huolettaa vaihtaa johonkin konkreettiseen tapaukseen ja dimensiotakin voi pienentää. Ks. vihjeet alempana.
- Tehtävät 10–11 liittyvät luvun lopun esimerkkiin Veronesen upotuksesta. Ne eivät ole erityisen vaikeita, mutta niitä varten on tutustuttava kyseiseen esimerkkiin. Tehtävässä 10 puhutaan harhaanjohtavasti projektiivisen avaruuden $\mathbb{P}^N$ lineaarisesta aliavaruudesta. Tällä tarkoitetaan ympäröivän vektoriavaruuden k^{N+1} lineaarista aliavaruutta (ks. vihjeet alempana).

Vihjeitä:

1. Käytä molemmissa suunnissa vastaoletusta ja piirrä paljon Venn-diagrammeja. Projektiivinen sulkeuma $\bar{U}$ on määritelmän mukaan pienin avaruuden $\mathbb{P}^n$ suljettu joukko, joka sisältää joukon U. Ajattele avaruuden $\mathbb{A}^n$ sisältyvän avaruuteen $\mathbb{P}^n$ (esimerkiksi jonakin affiinina osana). Tällöin voit käyttää relatiivitopologiaa: Y on suljettu affiinissa avaruudessa, joss $Y = X \cap \mathbb{A}^n$, missä X on suljettu $\mathbb{P}^n$:ssä.

2. Käytä injektiivisyyden osoittamiseen tietoa $U = \bar{U} \cap \mathbb{A}^n_0$. Surjektiivisuuden näyttämiseksi on osoitettava, että jos projektiivisen suljetun joukon jaoton komponentti X_i ei sisälly hypertasoon $S_0 = 0$, sille pätee $X_i = \overline{X_i \cap \mathbb{A}^n_0}$.

3. Noudata tehtävänannon vihjettä. Koska X sisältyy affiiniin avaruuteen, voit käyttää homogeenisten koordinaattien sijaan tavallisia koordinaatteja. Tällöin pisteessä x säännöllinen funktio f on muotoa $P(T)/Q(T)$, missä $Q(x) \neq 0$. Osoita, että koko X:ssä säännöllisiä funktioita ovat täsmälleen kaikki kahden muuttujan polynomit (eli Q on aina vakio).

   Etsi sitten jokin $k[X]$:n aito ideaali, jonka määrittelemä X:n osajoukko on tyhjä. Tämä johtaa ristiriitaan X:n affiiniuden kanssa, sillä Nullstellensatzin mukaan affiinin suljetun joukon Y koordinaattirenkaan aito ideaali määrittelee epätyhjän Y:n osajoukon. (Ideaalin alkiot saadaan jonkin ideaalin $I \subset k[T]$ alkioista, ja aidon ideaalin $\langle I, I_Y \rangle \subset k[T]$ polynomeilla on yhteinen nollakohta.)

4. Suoraviivainen relatiivitopologian harjoitus. Muista kvasiprojektiivisen varieteetin määritelmä.

5. Rationaalikuvaus $\varphi\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^n$ on muotoa $(F_1 : \cdots : F_n)$. Olkoon $x \in \mathbb{P}^1$. Voit rajoittua x:n sisältävään affiiniin osaan, jolloin voit käyttää kaikissa F_i:ssä (yhtä) affiinia koordinaattia T. Etsi sellaiset polynomit $F'_1, \ldots, F'_n$, että $(F_1 : \cdots : F_n) = (F'_1 : \cdots : F'_n)$ ja $F'_i(x) \neq 0$ jollain i. Tällöin φ on säännöllinen pisteessä x.

6. Käytä tietoa, että $k[\mathbb{P}^1]$ sisältää vain vakioita. (Ks. sivu 47.)

7. Tämä tehtävä kannattaa muuttaa konkreettisemmaksi. Tarkastele esimerkiksi polynomin $S_0S_2 - S_1^2$ määrittelemää toisen asteen käyrää X projektiivisessa tasossa $\mathbb{P}^2$. Rajoittumalla aluksi affiiniin osaan $\mathbb{A}_0^2$ valitse stereografisen projektion keskukseksi origo ja projisoi suoralle $T_2 = 1$. Projektiivisessa tasossa tämä vastaa projisointia pisteestä $(1 : 0 : 0)$ suoralle L_1, jonka yhtälö on $S_2 = S_0$.

   Suoralla L_2, joka kulkee pisteiden $(1 : 0 : 0)$ ja $(x_0 : x_1 : x_2) \in X$ kautta, on yhtälö $x_1S_2 = x_2S_1$. Projektiopiste $L_1 \cap L_2$ selviää, kun ratkaiset yhtälöparin $\{S_2 = S_0, x_1S_2 = x_2S_1\}$. Tällä tavoin saat rationaalikuvauksen $\varphi\colon X \to \mathbb{P}^1$.

   Entä toinen suunta? Olkoon L_3 suora, joka kulkee pisteiden $(1 : 0 : 0)$ ja $(y_0 : y_1 : y_0) \in L_1$ kautta. Tuon suoran pisteet ovat muotoa $(s : y_1t : y_0t)$, missä $s, t \in k$. Sijoittamalla tällaisen pisteen X:n määrittelevään yhtälöön ja ratkaisemalla t:n saat selville leikkauspisteen $X \cap L_3$. Tämä antaa rationaalikuvauksen $\psi\colon \mathbb{P}^1 \to X$.

   Kuvaus ψ on säännöllinen, ja φ on säännöllinen yhtä pistettä lukuunottamatta. Voit halutessasi yleistää tulokset varsinaisen tehtävänannon tilanteeseen, mutta konkreettisen esimerkin käsittely riittää ratkaisuksi.

8. Käytä tässäkin edellisen vihjeen konkreettista esimerkkiä.

9. Etsi käänteisfunktio f^{-1}. Kuvaus f on säännöllinen kolmea pistettä lukuunottamatta. Poistamalla noiden kolmen pisteen alkukuvat kuvauksessa f^{-1} saat avoimen joukon, jossa f ja f^{-1} ovat molemmat säännöllisiä.

10. Tehtävänanto on epäselvä, koska siinä viitataan projektiivisen avaruuden $\mathbb{P}^N$ lineaariseen aliavaruuteen, vaikka $\mathbb{P}^N$ ei ole vektoriavaruus. Tarkoitus on sanoa, että kuvajoukko $v_m(\mathbb{P}^n)$ ei sisälly mihinkään ympäröivän vektoriavaruuden k^{N+1} lineaariseen aliavaruuteen. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että $v_m(\mathbb{P}^n)$ ei sisälly minkään epätriviaalin lineaarimuodon $\mathbb{P}^N \to k$ ytimeen. Toisin sanoen, on näytettävä, että jos

$$\sum_{i_0 \dots i_n} c_{i_0 \dots i_n} u_0^{i_0} \cdots u_n^{i_n} = 0 \qquad \text{kaikilla } u_0, \dots, u_n \in k,$$

    niin jokainen kerroin $c_{i_0 \dots i_n}$ on 0.

11. Käytä Veronesen upotusta v_2 upottamaan X avaruuteen $\mathbb{P}^5$. Tällöin $v_2(X)$ on projektiivisen suljetun joukon $v_2(\mathbb{P}^2)$ ja jonkin hypertason $V(f)$ leikkaus. Valitse sitten $\mathbb{P}^5$:n koordinaatit $\{S_0, \dots, S_5\}$ siten, että $V(f)$ on hypertaso $S_0 = 0$.