Ohjeita luvun I.3 tehtäviin

Yleistä:

- Kaikki tehtävät ovat oikein hyviä harjoituksia luvun (ja aiempienkin lukujen) asioista.

Vihjeitä:

1. Ratkaise yhtälöpari, jotta saat selville, mitä pisteitä joukkoon X kuuluu. Voit olettaa tunnetuksi, että ympyrä $V(y^2 + z^2 + a)$ on jaoton, kun $a \neq 0$. (Tähän riittäisi osoittaa, että $y^2 + z^2 + a$ on jaoton polynomi, mikä onnistuu helposti raa'an voiman menetelmällä.)

2. En ole varma, pitäisikö viittauksen olla edellisen luvun tehtävään 2.4 vai 2.2. Tulos on kuitenkin sama. Rationaalifunktio $f = F/G$ voidaan kirjoittaa siten, että F ja G ovat tehtävän 2.2 antamassa muodossa. (Voit olettaa, että $I_X = \langle y^2 - x^3 - x^2 \rangle$.) Lavenna sitten y pois nimittäjästä. Yksikäsitteisyys saadaan samalla tavoin kuin edellisen luvun tehtävässä 2.2, kun ensin kerrotaan nimittäjät pois.

3. Esimerkkien 2 ja 3 kuvausten tarkistaminen on suoraviivaista (muista tarkistaa kuvajoukon tiheys). En ole varma, mihin esimerkin 6 kuvaukseen viitataan, mutta ainakaan Frobeniuksen kuvauksen ei käsittääkseni pitäisi olla birationaalinen. Voit tutkia sen sijaan esimerkin 5 kuvausta.

4. Ratkaise jälleen yhtälöpari. Saat kaksi komponenttia olettamalla vuorotellen, että $y \neq 0$ ja $y = 0$. Voit osoittaa komponentit jaottomiksi helpoiten tutkimalla koordinaattirenkaita. Birationaalisuuden näyttäminen on suoraviivaista.

5. Matki luvussa 1.2 esitettyä projektiota. Kuvaa ensin $\mathbb{A}^{n-1}$ avaruuden $\mathbb{A}^n$ tasoksi Y, jolla $T_n = 1$. Tuon tason pisteen $(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$ ja origon kautta kulkeva suoran pisteet ovat muotoa $s(x_1, \ldots, x_{n-1}, 1)$. Sijoittamalla tällaisen pisteen koordinaatit X:n yhtälöön voit ratkaista, millä s:n arvolla suora leikkaa X:n. Tämä antaa rationaalikuvauksen $Y \to \mathbb{A}^n$. Toiseen suuntaan pääset helpommin.

6. Tätä käsiteltiin luennolla. Pisteessä $(0, 1)$ voit laventaa funktion lausekkeen x:llä ja käyttää ympyrän yhtälöä, jotta saat x:n pois nimittäjästä. Jos f olisi säännöllinen kaikissa pisteissä, se olisi lauseen 4 (sivu 36) perusteella säännöllinen. Tee vastaoletus, että $f \in k[X]$ ja johda ristiriita. (Huomaa jälleen, että $I_X = \langle x^2 + y^2 - 1 \rangle$.)

7. Samantapainen tehtävä kuin edellinen. Funktio on yhtä pistettä lukuunottamatta säännöllinen.