Ohjeita luvun I.2 tehtäviin

Yleistä:

- Tehtävät 8–11 liittyvät aivan luvun lopussa mainittuihin tuloksiin $\mathbb{A}^n$:n automorfismeista. Näistä 10 menee aika paljon ryhmäteorian puolelle, ja lisäksi siinä taitaa olla jokin painovirhe. (Ryhmäteoriasta kiinnostuneille voin kyllä suositella tehtävään tutustumista.)
- Tehtävät 17–19 liittyvät kirjan esimerkkiin 6. Kaksi jälkimmäistä vaativat esimerkin tarkkaa läpikäymistä. (Tästä esimerkistä voisi tehdä esimerkiksi tutkielman.)

Vihjeitä:

1. Määritä joukko X ja anna ideaalin I_X virittäjät. Monomi y on ideaalissa I_X, mutta ei ideaalissa $\langle f, g\rangle$. (Voit osoittaa tämän vetoamalla polynomien asteisiin renkaassa $k(x)[y]$.)
2. Voit olettaa, että $I_X = \langle y^2 - x^3\rangle$. (Tämä seuraa Nullstellensatzista ja siitä, että kyseinen polynomi on jaoton.) Kirjoita mielivaltainen $k[x, y]$:n polynomi muodossa $P(x) + Q(x)y + R(x, y)(y^2 - x^3)$. Muista osoittaa myös esityksen yksikäsitteisyys. (Tässä voit jälleen vedota polynomien asteisiin renkaassa $k(x)[y]$.)
3. Noudata tehtävänannon vihjettä. Muista, että säännöllinen kuvaus $X \to \mathbb{A}^1$ on sama asia kuin X:n säännöllinen funktio.
4. Joukosta X on kuva luvussa 1.2. Takaisinvedon injektiivisyyden osoittamiseen auttaa tieto, että f on surjektiivinen. Surjektiivisuuden osoittamiseksi kannattaa käyttää jakoyhtälöä. Sen perusteella polynomi $g(t)$, jolle pätee $g(1) = g(-1)$, on muotoa $P(t^2)(t^3 - t) + Q(t^2)$.
5. Tarkista, että hyperbelin $X = V(xy - 1)$ ja avaruuden $\mathbb{A}^1$ koordinaattirenkaat eivät ole isomorfiset. (Monomien x ja y sivuluokat kuvautuvat homomorfismeissa vakioille.)
6. Voit käyttää samoja ideoita kuin luennolla esimerkissä, jossa tutkittiin joukon $\{(x, 1) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ sulkeumaa $\mathbb{R}^2$:ssa.
7. Sama kuin edellä.
8. Oleta, että $f(g(t)) = t$ ja tarkastele polynomin $f(g(t))$ astetta.
9. Tarkista ryhmäaksioomat.
10. Noudata tehtävän vihjettä. (Jonkin yhtäsuuruuden pitäisi luultavasti olla $\leq$.)
11. Osoita, että $J(f \circ g) = J(f)J(g)$. Väitteet seuraavat tästä.

12. Olkoot $x, y \in \mathbb{A}^n$. Näytä, että kaikilla pareilla $(a, b) \in k \oplus k$ löytyy polynomi $f(T)$, jolle $f(x) = a$ ja $f(y) = b$.

13. Kirjoita graafin määrittelevä polynomiyhtälö. Isomorfismin saa projektiosta.

14. Pelkkää joukko-oppia.

15. Käytä tehtävää 13.

16. Hilbertin kantalauseesta seuraa, ettei ole olemassa aidosti vähenevää jonoa suljettuja joukkoja.

17. Käytä tehtävää 8.

18. Tutki esimerkkiä 6.

19. Sama kuin edellä.