Ohjeita luvun II.1 tehtäviin 1–10

Yleistä:

- Tehtävät 2–6 ovat melko toisteisia, ja niissä pääosassa on tietyn affiinin suljetun joukon koordinaattirenkaan selvittäminen. Ei siis kannata välttämättä tehdä kaikkia tehtäviä järjestyksessä, vaan vilkaista jo heti alussa myös tehtäviä 7–10.

Vihjeitä:

1. Tehtävä on suoraviivainen. Kun X on jaoton ja affiini, lokaali rengas $\mathcal{O}_{X,x}$ koostuu niistä rationaalifunktioista, joiden nimittäjä ei ole nolla pisteessä x. Yleisessä tapauksessa X ei välttämättä ole affiini. Tällöin lokaali rengas määritellään niin, että $\mathcal{O}_{X,x} = \mathcal{O}_{X \cap \mathbb{A}_i^n, x}$, missä $\mathbb{A}_i^n$ on x:n sisältävä affiini osa.
2. Mukaillen tehtäviä I.2.2 ja I.3.2 voit kirjoittaa $k(X)$:n alkiot muodossa $u(x)+v(x)y$, missä $u, v \in k(x)$ ovat yksikäsitteisiä. Tästä voit päätellä, minkälaisista alkioista $\mathcal{O}_x$ koostuu. Sen jälkeen tarvitsee vain käyttää takaisinvetoa.
3. Kuten edellinen tehtävä.
4. Olkoon X tehtävän käyrä. Nyt
$$\mathcal{O}_x = \{f/g \mid f, g \in k[X],\, g(x) \neq 0\}.$$
Selvitä ensin, millainen on koordinaattirengas $k[X]$. Isomorfismin $\mathcal{O}_x \to \mathcal{O}_1 \oplus \mathcal{O}_2$ keksimiseksi saattaa olla helpompaa yrittää ensin keksiä injektiivinen homomorfismi $k[X] \to \mathcal{O}_1 \oplus \mathcal{O}_2$. Huomaa, että voit valita rationaalilausekkeissa nimittäjän vakiotermiksi 1.
5. Samantapainen kuin edellä (lukuunottamatta isomorfismin löytämistä).
6. Jälleen hieman samantapainen tehtävä. Epäisomorfisuuden osoittamiseen ei tässä kannata käyttää tehtävän alkuosaa (lokaaleja renkaita).
7. Suoraviivainen lasku vektoriavaruuksilla. Voit esimerkiksi valita kannat tangenttiavaruuksille ja täydentää ne sitten koko avaruuksien $\mathbb{A}^m$ ja $\mathbb{A}^n$ kannoiksi. Sitten voit yhdistää nämä avaruuden $\mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^n$ kannaksi ja tutkia siellä pisteen (x, y) tangenttiavaruutta.
8. Muista, miten saadaan joukon $X_1 \cup X_2$ yhtälöt joukkojen X_1 ja X_2 yhtälöistä, ja käytä tangenttiavaruuden määritelmää differentiaalien nollajoukkona.
9. Voit olettaa, että epäsingulaarinen piste on origossa. Tutki annetun hyperpinnan määrittelypolynomin differentiaalia origossa. Origokärkinen kartio on sellainen hyperpinta X, että jos $x \in X$, niin $\lambda x \in X$ kaikilla $\lambda \in k$ (vrt. projektiivisen avaruuden määritelmään.)

10. Tutki jälleen hyperpinnan differentiaalia, tällä kertaa kahdessa eri pisteessä (voit valita niiden koordinaatit vapaasti). Tässä kannattaa käyttää differentiaalien laskemiseksi kaavaa

$$\mathrm{d}F_x = \sum_i \frac{\partial F}{\partial T_i}(x)(T_i - x_i).$$