Johdatustehtäviä algebralliseen geometriaan, osa 1
Kesä 2013

Algebrallisessa geometriassa tutkitaan n:n muuttujan polynomien nollajoukkoja vektoriavaruudessa k^n, missä k on algebrallisesti suljettu kunta. Esimerkiksi polynomin $X^2 + Y^2 - 1$ nollajoukko on tunnetusti yksikköympyrä. Ajatuksena on johtaa yhteyksiä tällaisten nollajoukkojen ja polynomirenkaan ideaalien välille.

Tämän tehtäväkokoelman tehtävät kertaavat sellaista polynomien teoriaa, joka olisi hyvä palauttaa mieleen ennen kuin alkaa opiskella algebrallista geometriaa. Monien tehtävien ratkaisut löytyvät kurssien Algebra I ja Algebra II luentomateriaaleista. Voit katsoa ratkaisut materiaaleista tai yrittää tehdä ne itse, mutta kirjoita ratkaisut kuitenkin ylös siististi omin sanoin, jotta varmasti ymmärrät ne ja voit tarvittaessa palata niihin.

Hieman vaikeammat, usein Algebra II:n tietoja vaativat tehtävät on merkitty tähdellä.

Jaollisuus polynomirenkaissa

Algebrallisessa geometriassa käsitellään usean tuntemattoman polynomeja. Niiden teoria poikkeaa monilta osin yhden tuntemattoman polynomien teoriasta. Jos k on vaihdannainen rengas (esim. kunta), muuttujien $T_1, \dots, T_n$ k-kertoimisten polynomien muodostamaa rengasta merkitään $k[T_1, \dots, T_n]$.

1. Olkoot $F = 3X^2 - 2X + 1$ ja $G = X + 2$. Etsi sellaiset polynomit Q ja R, että $F = QG + R$ ja R on vakiopolynomi.

2. Olkoon k kunta. Todista yhden muuttujan polynomirenkaan $k[X]$ jakoyhtälö: Jos $F, G \in k[X]$ ja $G \neq 0$, on olemassa polynomit $Q, R \in k[X]$, joille pätee

$$F = QG + R,$$

   missä joko $R = 0$ tai $\deg(R) < \deg(G)$.

3. Olkoon k kunta, ja olkoot $F \in k[X, Y]$ ja $G \in k[Y]$, $\deg(G) = 1$. Osoita, että on olemassa polynomit Q ja R, joille pätee $F = QG + R$ ja $R \in k[X]$.

4. Olkoon k kunta ja olkoot $F, G \in k[X]$. Tarkastellaan F:n ja G:n virittämiä ideaaleja

$$\langle F \rangle = \{PF \mid P \in k[X]\} \quad \text{ja} \quad \langle G \rangle = \{PG \mid P \in k[X]\}.$$

   Näytä, että $G|F$ joss $F \in \langle G \rangle$ joss $\langle F \rangle \subset \langle G \rangle$.

5. Osoita, että polynomirengas $k[T_1, \dots, T_n]$ on kokonaisalue. (Vihje: osoita ensin, että jos R on kokonaisalue, niin $R[X]$ on kokonaisalue ja käytä sitten induktiota.)

Polynomirenkaiden ideaalit ja tekijärenkaat

Tämän osan tehtävissä k on kunta. Alkuideaalit ovat algebrallisen geometrian kannalta tärkein ideaalien tyyppi. Kertaa alkuideaalin määritelmä esimerkiksi Algebra II:n materiaalista.

6. Tarkastellaan polynomirenkaan $k[X]$ ideaalia $I = \langle X^2 \rangle$. Osoita, että jos $F \notin I$, niin $F = G + R$, missä $G \in I$, $R \neq 0$ ja $\deg(R) \leq 1$. (Vihje: jakoyhtälö.)

7. Tarkastellaan polynomirenkaan $k[X]$ ideaalia $I = \langle X^2 + 1 \rangle$. Osoita, että tekijärenkaassa $k[X]/I$ pätee $(X + I)^2 = -1 + I$. Osoita myös yleisemmin, että kaikilla $F \in k[X]$ pätee $F + I = R + I$, missä $R = 0$ tai $\deg(R) \leq 1$.

8. Olkoon $V \subset k^n$. Osoita, että joukko

$$I(V) = \{F \in k[T_1, \ldots, T_n] \mid F(t_1, \ldots, t_n) = 0 \text{ kaikilla } (t_1, \ldots, t_n) \in V\}$$

on polynomirenkaan $k[T_1, \ldots, T_n]$ ideaali.

9.* Olkoon R rengas ja I sen ideaali. Osoita, että I on alkuideaali, jos ja vain jos R/I on kokonaisalue.

10.* Polynomirengas $k[T_1, \ldots, T_n]$ on tunnetusti tekijöihinjakorengas: jokaisella polynomilla on yksikäsitteinen esitys jaottomien polynomien tulona. (Polynomi on jaoton, jos se ei ole vakiopolynomi eikä vähintään ensimmäistä astetta olevien polynomien tulo.) Olkoot $F, G, H \in k[T_1, \ldots, T_n]$ ja olkoon H jaoton. Osoita, että jos H jakaa tulon FG, niin H jakaa jommankumman polynomeista F ja G.

11. Osoita, että jos $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$ on jaoton polynomi, niin $\langle F \rangle$ on alkuideaali. (Vihje: edellinen tehtävä.)

Rengasisomorfismeista

Palauta mieliin renkaiden homomorfialause kurssilta Algebra I ja sijoitushomomorfismin olemassaololause kurssilta Algebra II.

12. Olkoon k kunta. Osoita, että löytyy rengashomomorfismi $\varphi\colon k[X] \to k$, jolle pätee $\varphi(X) = 1$. (Vihje: sijoitushomomorfismi. Voit myös osoittaa, että löydetty φ on yksikäsitteinen, mikäli vaaditaan lisäksi, että $\varphi(t) = t$ kaikilla $t \in k$.)

13. Jatkoa edelliseen tehtävään. Osoita, että $\operatorname{Ker} \varphi = \langle X - 1 \rangle$. (Vihje: jakoyhtälö.)

14. Jatkoa edelliseen tehtävään. Osoita, että tekijärengas $k[X]/\langle X - 1 \rangle$ on isomorfinen kunnan k kanssa. (Vihje: homomorfialause.)

15.* Osoita, että $k[X, Y]/\langle Y + 1 \rangle \cong k[X]$, ja päättele tästä, että ideaali $\langle Y + 1 \rangle$ on alkuideaali. (Vihje: muista, että polynomirengas on kokonaisalue.)

Algebrallisesti suljetut kunnat

Kunta k on algebrallisesti suljettu, jos jokaisella polynomilla $F \in k[X]$, joka ei ole vakio, on ainakin yksi juuri kunnassa k. Esimerkiksi kunta $\mathbb{C}$ on algebrallisesti suljettu.

16. Olkoon k algebrallisesti suljettu kunta. Oletetaan, että $n \geq 2$ ja $F \in k[T_1, \ldots, T_n]$. Osoita, että on olemassa ääretön määrä pisteitä $(t_1, \ldots, t_n) \in k^n$, joille pätee $F(t_1, \ldots, t_n) = 0$. (Vihje: muodosta yhden muuttujan polynomeja sijoittamalla $T_1 = t_1, \ldots, T_{n-1} = t_{n-1}$.)

17. Oletetaan, että k on algebrallisesti suljettu kunta. Osoita, että toisen asteen polynomilla $X^2 - a$, missä $a \in k \setminus \{0\}$, on tasan kaksi nollakohtaa, paitsi jos k:n karakteristika on 2. Päättele, että jokaisella luvulla $x \in k \setminus \{0\}$ on kaksi neliöjuurta kunnassa k, jos $\mathrm{char}(k) \neq 2$.

18.* Osoita, että algebrallisesti suljettu kunta on ääretön.

Ideaalien virittäjistä ja ketjuista

Vaihdannaista rengasta, jossa jokainen toisiinsa aidosti sisältyvien ideaalien nouseva ketju $I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq I_3 \subsetneq \cdots$ on äärellinen, kutsutaan Noetherin renkaaksi.

19.* Osoita, että jos rengas R on Noetherin rengas, jokaisella ideaalilla on äärellinen virittäjäjoukko.

20.* Osoita, että jos renkaan R jokaisella ideaalilla on äärellinen virittäjäjoukko, R on Noetherin rengas.

Noetherin renkaiden merkitys algebrallisen geometrian kannalta on siinä, että jos k on kunta, polynomirenkaan $k[T_1, \ldots, T_n]$ jokaisella virittäjällä on äärellinen virittäjäjoukko (Hilbertin kantalause). Siten polynomirenkaat ovat Noetherin renkaita.