Integraaliyhtälöt

Harjoituskokoelma 1

Tehtävät 1–4 pohjautuvat kahden ensimmäisen viikon materiaaliin (monisteen sivut 1.1 - 1.12). Tehtävät 5–7 pohjautuvat luentomonisteen sivuihin 1.13 - 1.20.

1. Ratkaise Volterra–yhtälö

$$\phi(s) - \int_0^s (s-t)\,\phi(t)\,dt = 2s$$

2. Ratkaise Volterra-yhtälö

$$\phi(s) - 4\int_0^s (s-t)\,\phi(t) = s^3$$

3. Olkoon K jatkuva integraaliydin. Tarkastellaan luennoilla määriteltyjä iteroituja ytimiä

$$K^{(1)}(s,t) = K(s,t), \quad K^{(n)}(s,t) = \int_t^s K(s,r)K^{(n-1)}(r,t)\,dr$$

Osoita että pätee

$$K^{(n)}(s,t) = \int_t^s K^{(n-1)}(s,r)K(r,t)\,dr.$$

Vihje: Käytä induktiota n:n suhteen.

4. Tarkastellaan *toisen lajin Fredholm–yhtälöä*

$$\phi(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)\phi(t)\,dt = f(s), \quad a \le s \le b, \tag{0.1}$$

missä $K \in C([a,b]\times[a,b])$, $f \in C([a,b])$ ja $\lambda \in \mathbb{C}$. Tutki millä lisäoletuksilla ytimestä K luennoilla käytetty ansaz

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n(x)$$

määrää yhtälön (0.1) jatkuvan ratkaisun. Onko ratkaisu tällöin yksikäsitteinen?

5. Palauta alkuarvo–ongelma

$$y^{(3)} + 2xy = 0,\ y(0) = y'(0) = 0, y''(0) = 1$$

ekvivalenttiin toisen lajin Volterra–yhtälöön.

6. Ratkaise ensimmäisen lajin Volterra–yhtälö

$$\int_1^s (s+t)\phi(t)\,dt = s^3 - 1.$$

7. Tarkastellaan ensimmäisen lajin Volterra–yhtälöä

$$\int_a^s K(s,t)\phi(t)\,dt = f(s) \tag{0.2}$$

missä K and f ovat jatkuvia. Oletetaan että $K(s,s) = 0$ kaikilla $s \in [a,b]$ ja että funktiolla K on jatkuvat osittaisderivaatat muuttujan s suhteen kertalukuun kaksi asti. Muotoile ja todista ratkeavuustulos yhtälölle (0.2).