FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

9. HARJOITUKSET (pe 15.11, 12-14 salissa C124)

1. Osoita, että $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \subset L^p(\mathbf{R}^d)$ kaikilla $p \in [1,\infty]$.

2. (i) Sovella luentomonisteen Lauseen 9.7 identiteettiä $\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{f}(x)g(x)dx$ sopivasti ja osoita, että

$$(2\pi)^d \int_{\mathbf{R}^d} f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\mathbf{R}^d} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}d\xi \tag{1}$$

aina kun $f, g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

(ii) Sovella avaruuden $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ tiheyttä $L^2(\mathbf{R}^d)$:ssa, ja todista näin (1) kaikille $f, g \in L^2(\mathbf{R}^d)$.

3. Olkoon $f_k, f \in L^2(\mathbf{R}^d)$, $k = 1, 2, \ldots$. Oletetaan, että $f_k \to f$ avaruudessa $L^2(\mathbf{R}^d)$ kun $k \to \infty$, ja lisäksi $f_k(x) \to g(x)$ melkein kaikilla $x \in \mathbf{R}^d$ kun $k \to \infty$. Osoita tarkasti, että tällöin $f(x) = g(x)$ melkein kaikilla $x \in \mathbf{R}^d$.

4. (i) Merkitään Δ:lla Laplace-operattoria

$$\Delta f(x) := \Big(\sum_{k=1}^{d} \frac{d^2}{dx_j^2}\Big) f(x).$$

Olkoon $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Laske $\mathcal{F}\Delta f$.

(ii) Osoita, että $(k^2 + |x|^2)^{-1} f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ aina kun $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ja $k > 0$.

5. Olkoon $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Osoita, ratkaisemalla f:n Fourier-muunnos, että osittaisdifferentiaaliyhtälöllä

$$\Delta f \; - \; f \; = \; g$$

on ratkaisu $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$. Johda eksplisiittinen ratkaisukaava dimensiossa $d = 1$.

6* Olkoon $n, m \in \mathbf{Z}$. Merkitään $\mathrm{sinc}(x) := \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ Määritellään funktiot $f_{n,m} : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ asettamalla

$$f_{n,m}(x) \; := \; \mathrm{sinc}(x-n)e^{2\pi i m x}, \qquad m, n \in \mathbf{Z}.$$

Osoita, että kyseiset funktiot muodostavat avaruuden $L^2(\mathbf{R})$ ortonormaalin kannan.

Vihjeitä:

T.2: [Matki Lemman 10.2 todistuksen alkua.]

T.5: [Jälkimmäistä kysymystä varten, muista T.1/Harj.7]

T.6: [Katso miltä kyseisten funktioiden Fourier-muunnokset näyttävät! Tätä varten muista T.3/Harj.7]