FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

8. HARJOITUKSET (pe 8.11, 12-14 salissa C124)

1. Olkoon $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Osoita, että

(i) Jos $g(x) = \overline{f(-x)}$, silloin $\widehat{g}(\xi) = \overline{\widehat{f}(\xi)}$.

(ii) Jos $g(x) = \frac{1}{t^d} f\left(\frac{x}{t}\right)$, $t > 0$, silloin $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(t\,\xi)$.

2. Olkoon $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$ multi-ideksi. Osoita tarkasti, että jos $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$, niin

(i) $x^\alpha f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ja $\partial^\alpha f(x) \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$,

(ii) $\widehat{f} \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ ja $\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = \Big((-i\,x)^\alpha f(x) \Big)\widehat{\ }(\xi)$.

(iii) $(\partial^\alpha f)\widehat{\ }(\xi) = (i\,\xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$.

Edellä (ii)-kohdassa $i^\alpha := i^{|\alpha|}$.

3. Sovella edellistä tehtävää ja näytä:

$$\text{jos} \quad f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d), \quad \text{niin} \quad \widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d).$$

4. Oletetaan, että $H \in L^1(\mathbf{R}^d)$ toteuttaa ehdot jolle $H \geq 0$, ja $\int_{\mathbf{R}^d} H(x)dx = 1$, sekä

$$|H(x)| \leq \frac{C}{(1+|x|)^{d+1}}.$$

Kun $\varepsilon > 0$ merkitään $H_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-d} H(x/\varepsilon)$. Jos $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ on jatkuva origossa, osoita että

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\mathbf{R}^d} f(x) H_\varepsilon(x) dx = f(0).$$

5. Näytä, että $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ kun $f(x) = e^{-|x|^2}$.

6* Todista Leibnitzin yleinen sääntö tulon derivoinnille: jos $\alpha \in \mathbf{N}_0^d$ on mielivaltainen multi-ideksi ja $f, g \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$, niin

$$\partial^\alpha (fg)(x) = \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} \partial^\beta f(x)\, \partial^{\alpha-\beta} g(x),$$

missä $\displaystyle \binom{\alpha}{\beta} := \prod_{j=1}^d \binom{\alpha_j}{\beta_j}$

Vihjeitä:

T.2: [(ii)-kohdassa todista ensin induktiolla jälkimmäinen kaava,]

T.2, T.3: [ ]

T.4: []

T.5: []

T.7: [Ei ole vaikea!]