

FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

7. HARJOITUKSET (pe 1.11, 12-14 salissa C124)

1. Johda \mathbf{R}^1 :llä määritellyn funktion $f(x) := e^{-k|x|}$ (missä $k > 0$) Fourier-muunnokselle $\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(x) dx$ kaava

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{2k}{k^2 + \xi^2}$$

2. Oletetaan että funktio $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{C}$ on muotoa

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_1)f_2(x_2),$$

missä $f_1, f_2 \in L^1(\mathbf{R}^1)$. Näytä, että silloin $f \in L^1(\mathbf{R}^2)$ ja pätee

$$\widehat{f}(\xi_1, \xi_2) = \widehat{f}_1(\xi_1)\widehat{f}_2(\xi_2).$$

Kirjoita vastaava kaava \mathbf{R}^d :n funktion $f_1(x_1)f_2(x_2) \dots f_d(x_d)$ Fourier-muunnokselle

3. (i) Määrää Fourier-muunnos välin $[-a, a]$ karakteristiselle funktiolle $\chi_{[-a, a]}$.
(ii) Laske yleisemmin kuution $[-a, a]^d$ karakteristisen funktion $\chi_{[-a, a]^d}$ Fourier-muunnos.
4. Määrää funktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ Fourier-muunnos kun

$$f(x) = \max(0, 1 - |x|).$$

Vihjeitä:

T.1: [Laske erikseen integraalit väleillä $(-\infty, 0)$ ja $(0, \infty)$.]

T.2: [Muista Fubinin lause!]

T.3: [Sovella (ii)-kohdassa tehtävää 2.]

T.5: [Näytä ensin, että $f = \chi_{(-1/2, 1/2)} * \chi_{(-1/2, 1/2)}$, ja sovela konvoluutiolausetta ja edellistä tehtävää.]