FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

6. HARJOITUKSET (pe 18.10, 12-14 salissa C124)

1. Laske 2π-periodisen funktion f Fourier-sarja, missä $f(x) = 1$ kun $|x| < 1$ ja $f(x) = 0$ kun $x \in [-\pi, \pi) \setminus [-1, 1]$. Laske sen ja Parsevalin kaavan avulla summa $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(n)}{n^2}$.

2. Jos $f \in L^2(0, \pi)$ ja funktion f sini-sarja on $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx)$ (kertoimet siis saadaan kaavalla $c_k := (2/\pi) \int_0^{\pi} \sin(kx) f(x) dx$) osoita että

$$\int_0^{\pi} |f(x) - \sum_{k=1}^{K} c_k \sin(kx)|^2 dx \to 0 \quad \text{kun} \quad K \to \infty.$$

3. Olkoon $u(x, t)$ lämpötilajakauma tangolle välillä $[0, \pi]$ kuten luentojen luvussa VII.2 ja oletetaan, että lämpötilan alkujakauma f on jatkuvasti differentioituva. Osoita luennoilla johdetun kaavan avulla, että $\sup_{x \in [0,\pi]} |u(x, t)|$ lähestyy ekponentiaalista vauhtia nollaa kun $t \to \infty$. Osaatko todistaa saman jos oletat vain että $f \in L^2(0, \pi)$?

4. Todista kaava $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n!} = e^{\cos x} \cos(\sin(x))$.

5. Olkoot $c_0, k > 0$. Etsi Fourier-sarjojen avulla ratkaisu alkuarvotehtävälle

$$\frac{du(x,t)}{dt} = c_0 \frac{d^2 u(x,t)}{d^2 x} - k^2 u(x, t), \qquad x \in (0, \pi), \quad t > 0,$$

reuna-arvoilla $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$ ja annetulla alkuarvolla $u(x, 0) = f(x)$.

6* Olkoon $f : [-\pi, \pi] \to \mathbf{R}$ parillinen reaaliarvoinen funktio, joka ei ole identtisesti nolla, ja jonka Fourier-sarja (näillä oletuksilla voidaan kirjoittaa kosinisarjana) suppenee itseisesti:

$$f(x) = \sum_{n=N}^{\infty} c_n \cos(nx), \quad \text{missä} \quad c_n \neq 0.$$

Osoita, että tällöin funktio ’väpättää’ vähintään yhtä paljon kuin ensimmäinen mukaanotettu termi $\cos(Nx)$, eli että funktiolla f on ainakin N merkinvaihtoa välillä $[0, \pi]$!

Vihjeitä:

T.2: [Peilaa f parittomaksi funktioksi välille $[-\pi, \pi]$ ja sovella saatuun funktioon vastaavaa tulosta välin $[-\pi, \pi]$ Fourier-sarjoille.]

T.4: [Muista eksponenttifunktion sarjakehitelmä ja Eulerin kaava!]

T.5: [Matki luentojen vastaavaa todistusta lämpöyhtälölle (ihan kaikkia yksityiskohtia ei tarvise esittää).]