FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

5. HARJOITUKSET (pe 10.10, 12-14 salissa C124)

1. Olkoon $f : [-\pi, \pi) \to \mathbf{R}$ välin $[0, \pi)$ karakteristinen funktio, eli $f(x) = 0$ jos $x \in [-\pi, 0)$ ja $f(x) = 1$ kun $x \in [0, \pi)$. Laske f:n Fourier-kertoimet. Mitkä identiteetit saat kun tarkastelet niiden avulla suureita $f(1/2)$ ja $(1/2\pi)\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$?

2. Etsi funktio $f \in L^2(-\pi, \pi)$ jolle $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\pi - |x|)dx = 1$ ja normi $\frac{1}{2\pi}\int |f(x)|^2 dx$ on pienin mahdollinen

3. Todista, että luentojen Lause 2.9 pätee pelkästään olettamalla että $f \in C^1_\#$ (eli siis silloin f:n Fourier-sarja suppenee jokaisessa pisteessä, vieläpä itseisesti).

4. Olkoon $f \in L^2(-\pi, \pi)$. Osoita, että Fejer-osasummille $\sigma_N f$ pätee:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f - \sigma_N f|^2 dx \; = \sum_{|n| \le N-1} \frac{|n|^2}{N^2} |\widehat{f}(n)|^2 + \sum_{|n| \ge N} |\widehat{f}(n)|^2.$$

Päättele tästä, että $\|f - \sigma_N f\|_{L^2(-\pi,\pi)} \to 0$ kun $N \to \infty$.

5. Olkoon $f \in C^2_\#$ ja $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = 0$. Todista epäyhtälö

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \; \le \; \int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 dx.$$

Mille reaaliarvoisille funktioille pätee yhtäsuuruus?

6* Olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 1-periodinen funktio, jolle $f(x) = x - 1/2$ kun $x \in [0, 1)$, ja oletetaan että m ja n ovat positiivisia kokonaislukuja. Todista Koksman kaava

$$\int_0^1 f(mx)f(nx)dx \; = \; \frac{1}{12}\frac{(m,n)^2}{mn},$$

missä (m, n) on lukujen m, n suurin yhteinen tekijä.

Vihjeitä:

T.1: [Muista Plancherelin kaava.]

T.2: [Tulkitse integraaliehto f:n sisätulona sopivan funktion kanssa. Ajattele tilanne alkeisgeometrian avulla, Fourier-kertoimia ei tarvitse laskea!]

T.3: [Huomaa, että (miksi?) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2|\hat{f}(n)|^2 < \infty$. Päättele tästä väite Cauchy-Schwartzin avulla.]

T.4: Palauta mieleen $\sigma_N f$;n Fouriersarja, ja laske sen avulla erotuksen $f - \sigma_N f$ Fourierkertoimet. Muista Teoreema 6.4(i).]

T.5: [Esitä kumpikin puoli epäyhtälöstä f:n Fourier-kertoimien avulla.]