FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

4. HARJOITUKSET (pe 3.10, 12-14 salissa C124)

1. (i) Osoita, että jos $f_n \to f$ ja $g_n \to g$ avaruudessa $L^2(-\pi,\pi)$ kun $n \to \infty$, niin silloin

$$(f_n, g_n) \longrightarrow (f, g) \quad \text{kun} \quad n \to \infty.$$

(ii) Todista Pythagoraan lause: jos $f, g \in L^2(-\pi,\pi)$ ja $(f,g) = 0$, niin $\|f+g\|_{L^2}^2 = \|f\|_{L^2}^2 + \|g\|_{L^2}^2$.

2. Olkoon $f \in L_1(-\pi,\pi)$ 2π-periodinen funktio. Osoita, että f on vakiofunktio 0-mittaista joukkoa lukuunottamatta jos sillä on lisäksi suhteellisesti irrationaalinen jakso α jolle $\alpha/\pi \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$ ja $f(x+\alpha) = f(x)$ melkein kaikilla $x \in \mathbf{R}$.

3. Oletetaan että jono $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ reaalilukuja on tasanjakautunut (mod 1). Olkoon $a \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ Osoita, että tällöin myös jono $(ax_n)_{n=1}^{\infty}$ on tasanjakautunut. Pitääkö tulos paikkansa jos a on irrationaalinen?

4. Olkoon jatkuvan funktion $f \in C_{\#}(-\pi,\pi)$ Fourier-sarja muotoa

$$f(x) = a_0 + \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i2^{|k|}x}.$$

(kyseessä on ns.*lakunaarinen* sarja). Osoita, että tällöin f:n Fourier-sarjan osasummat ovat rajoitettuja, eli $|S_n f(x)| \le C$ kaikilla $n \ge 1$ ja $x \in [-\pi,\pi)$.

5. Oletetaan, että jono (x_n) on tasanjakautunut ja olkoon $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ 1-jaksoinen funktio, joka on rajoitettu. Osoita, että

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(x_n) \to \int_0^1 f(x)dx$$

jos f:llä on ainostaan äärellisen monta epäjatkuvuuspistettä.

6* Onko jono $(\sqrt{n})_{n=1}^{\infty}$ tasanjakautunut välille $(0,1)$?

Vihjeitä:

T.4: [Muista de la Vallée-Poussinin ytimet (luennoilla näitä käytettiin Weiesrtrassin fuktion yhteydessä), eli huomaa että tehtävän funktiolle voidaan osasumma $S_N f$ lausua kahden Fejer-osasumman erotuksena!]

T.5: [Oleta ensin, että $|f| \leq M$ ja että se on epäjatkuva vain yhdessä pisteessä, esim. origossa (toisin sanoen 1-periodinen jatke on epäjatkuva $\mathbf{Z}$:n pisteissä). Kirjoita $f = g + b$, missä $|g|, |b| \leq M$, ja lisäksi g on jatkuva kun taas b on kannatettu välillä $[-\varepsilon, \varepsilon]$.]