FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

3. HARJOITUKSET (pe 27.9, 12-14 salissa C124)

1.. Olkoon f 2π-periodinen funktio, jolle $f(x) = \mathrm{sgn}(x) = x/|x|$ kun $x \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}$, ja $f(0) = f(\pm\pi) = 0$. Laske f:n Fourier-sarja ja totea, että kun $N \geq 1$ on pariton, niin se voidaan kirjoittaa muotoon

$$S_N(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{(N-1)/2} \frac{\sin(2k+1)x)}{2k+1}.$$

2. Olkoon $f \in C_{\#}(-\pi, \pi)$. Osoita, että $\|f - \sigma_N f\|_\infty \longrightarrow 0$ kun $N \to \infty$ ja päättele tästä, että trigonometriset polynomit ovat tiheässä (sup-normin suhteen) avaruudessa $C_{\#}(-\pi, \pi)$.

3. Osoita, että integroituvan funktion f Fourier-sarja suppenee jokaisessa f:n derivoituvuuspisteessä.

4. Todista luentojen Seuraus 4.8: Jos f on 2π-periodinen ja paloittain C^1, niin silloin f:n Fourier-sarja suppenee mv. pisteessä x kohti arvoa $\big(f(x^+) + f(x^-)\big)/2$.

5. Olkoon $f \in C_{\#}(-\pi, \pi)$ Hölder-jatkuva eksponentilla $\alpha \in (0, 1]$. Osoita, että

$$|\widehat{f}(n)| \leq C|n|^{-\alpha} \quad \text{kun} \quad |n| \geq 1.$$

6. (i) Olkoon f kuten tehtävässä 1. Osoita, että

$$\lim_{N\to\infty} S_N f(\frac{\pi}{N}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x} dx =: G_0$$

(ii) Osoita, että $G_0 > 1$, jolloin (i)-kohdasta seuraa luennoilla mainitun *Gibbsin ilmiön* olemassaolo. Tee tämä sijoittamalla sini-funktion Taylor-sarja luvun G_0 määrittelevään sarjaan ja johtamalla kaava

$$G_0 = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \pi^{2k}}{(2k+1)(2k+1)!}.$$

Laske sen avulla G_0:n arvo kolmella desimaalilla.

7* Oletetaan, että $f \in C^1_{\#}(-\pi, \pi)$. Osoita, että tällöin $S_N f \to f$ tasaisesti. Itse asiassa, todista mahdollimman hyvä tasainen konvergenssi muotoa

$$\|S_N f - f\|_{L^\infty(-\pi,\pi)} \leq e(N).$$

missä funktio $e : \mathbf{N} \to (0, \infty)$ lähestyy nollaa, eli yritä optimoida vauhti millä $e(N)$ konvergoi nollaan kun $N \to \infty$.

Vihjeitä:

T.2: [Muista: Fejerin ytimet ovat hyviä!]

T.5: [Näytä ensin, että $\widehat{f}(n) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} e^{-nix}\big(f(x) - f(x + \pi/n)\big)dx$.]

T.6: [Huomaa että funktio $g(x) =: x \to \frac{\sin(x)}{x}$ (missä $g(0) = 1$) on sileä funktio koko raaliakselilla.]