FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

2. HARJOITUKSET (pe 20.9, 12-14 salissa C124)

1. Olkoon $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Osoita, että jos f on parillinen funktio niin sen Fourier-kertoimet toteuttavat $\widehat{f}(n) = \widehat{f}(-n)$ kaikilla $n \in \mathbf{Z}$. Osoita, että jos kääntäen jatkuvan funktion Fourier-kertoimet toteuttavat tämän ehdon, niin f on parillinen. Millaiset ovat parittoman funktion Fourier-kertoimet?

2. Määritellään funktio $f : [-\pi,\pi) \to \mathbf{R}$ kaavalla $f(x) = \cos(x/2)$. Määritä f:n Fourier-sarja. Suppeneeko kyseinen sarja kaikissa pisteissä? Jos kyllä, niin minkä identiteetin saat sijoittamalla $x = 0$?

3. Luentojen mukaan $C^k_\#$-funktioiden Fourier kertoimet $\widehat{f}(n)$ menevät nollaan ainakin vauhdilla n^{-k} kun $|n| \geq 1$. Osoita seuraavassa mielessä käänteinen tulos: näytä että jos f on jatkuva funktio välillä $[-\pi,\pi]$ ja jokaiselle $k \in \mathbf{N}$ löytyy vakio $C = C_k$ jolle

$$|\widehat{f}(n)| \leq C_k(1+|n|)^{-k} \quad \text{kaikilla } n \in \mathbf{Z}$$

niin silloin $f \in C^\infty_\# := \cap_{k\geq 1} C^k_\#(-\pi,\pi)$.

4. Olkoon $(K_n)_{n\geq 1}$ jono hyviä ytimiä välillä $(-\pi,\pi)$ (siis K_n:t erityisesti 2π-jaksoisia). Todista yksityiskohtaisesti Lause 3.10 tapauksessa $p = 1$, eli jokaiselle $g \in L^1(-\pi,\pi)$ pätee

$$\lim_{n\to\infty} \|g - K_n * g\|_{L^1(-\pi,\pi)} = 0.$$

5. Osoita Dirichlet-ytimille identiteetti

$$\sum_{k=0}^{N-1} D_k(t) = \Big(\frac{\sin(Nt/2)}{\sin(t/2)}\Big)^2$$

6[*1] Osoita, luentojen tähänastisia tuloksia käyttämällä, että jokainen funktio $f \in C^2([0,\pi])$ (siis f on kahdesti jatkuvasti derivoituva päätepisteet mukaan lukien), jolle $f(0) = f(\pi) = 0$ voidaan kehittää sini-sarjaksi, joka suppenee jokaisessa pisteessä $x \in [0,\pi]$ kohti funktiota f:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(kx).$$

Etsi lauseke kertoimille c_k.

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.2: [Kirjoita $\cos(x/2)$ Eulerin kaavan avulla.]

T.3: [Vihje: Osoita että tässä tilanteessa f:n Fourier sarjaa voi derivoida.]

T.5: [Muista luennoilla johdettu kaava Dirichletin ytimelle. Kirjoita siinä osoittajan sinitermi Eulerin kaavan avulla.]

T.6: [Jatka f parittomaksi funktioksi välille $[-\pi, \pi]$!]