FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

1. HARJOITUKSET (pe 13.9, 12-14 salissa C124)

1. Olkoon $N \geq 2$ kokonaisluku. Laske summa $S = \sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi k i/N}$. Miten tuloksen voisi tulkita geometrisesti?

2. Olkoon $f(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}$. Tällaistä äärellistä trigonometrista sarjaa kutsutaan usein *trigonometriseksi polynomiksi* (astetta N). Osoita Eulerin kaavojen avulla, että yhtäpitävästi f voidaan kirjoittaa sinin ja kosinin monikertojen avulla muotoon

$$f(x) = a_0 \; + \; \sum_{n=1}^{N} a_n \cos(nx) \; + \; \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx).$$

Miten kertoimet a_n, b_n saadaan kertoimien c_n avulla? Entä toisinpäin?

3. Näytä, että edellisessä tehtävässä kertoimet a_n ja b_n saadaan kaavoilla

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) f(x) dx \quad \text{ja} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) f(x) dx \quad \text{kun } n = 1, \ldots, N, \quad \text{ja}$$

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx.$$

4. (i) Tarkastellaan reaaliakselilla määriteltyä 2π-jaksoista funktiota $f(x) = \pi - |x|$ kun $x \in [-\pi, \pi)$. Laske f:n Fourier-kertoimille kaava

$$\widehat{f}(n) = \begin{cases} \pi/2 & \text{jos } n = 0 \\ \dfrac{2}{\pi n^2} & \text{jos } n \text{ on pariton,} \\ 0 & \text{jos } n \text{ on parillinen, } n \neq 0, \end{cases}$$

5. (i) Olkoon f kuten tehtävässä 4. Totea luentojen sopivan lauseen avulla, että funktion f Fourier-sarja suppenee jokaisessa pisteessä $x \in (-\pi, \pi)$ kohti funktion f arvoa.

(ii) Sijoita funktion f Fourier-sarjaan $x = 0$ ja todista näin tulos

$$1 + 3^{-2} + 5^{-2} + \ldots \; = \; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \; = \; \frac{\pi^2}{8}.$$

(iii) Päättele (ei tarvitse kaikkia yksityiskohtia), että

$$1^{-2} + 2^{-2} + 3^{-2} + \ldots = \big(1 + 2^{-2} + 4^{-2} + 8^{-2} + \ldots\big)\big(1 + 3^{-2} + 5^{-2} + \ldots\big),$$

ja johda kuuluisa Eulerin kaava

$$1^{-2} + 2^{-2} + 3^{-2} + \ldots \; = \; \frac{\pi^2}{6}.$$

6*[1] Olkoon $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ jatkuva funktio. Määritellään sen momentit $M_f(n)$ kun $n = 0, 1, 2, \ldots$ kaavalla

$$M_f(n) := \int_0^1 x^n f(x) dx.$$

Osoita, että momentit määräävät funktion f yksikäsitteisesti, eli jos $g : [0,1] \to \mathbf{R}$ on toinen jatkuva funktio ja $M_g(n) = M_f(n)$ kaikilla indekseillä $n \geq 0$, niin $f(x) = g(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$.

[Huom. Itse asiassa samaan johtopäätökseen riittäisi vähempikin tieto, esim. pelkästään oletus $M_g(p) = M_f(p)$ kaikilla alkuluvuilla p, mutta tämä on hankalampi todistaa!]

[1] Näitä tähdellä merkittyjä tehtäviä ei välttämättä ehditä käymään läpi harjoituksissa, eikä niitä tarvitse tehdä vaikka haluaisikin täydet pisteet laskareista. Tähtitehtävät saattavat olla huomattavankin vaikeita, ja ne on tarkoitettu 'afficionadojen' ylimääräiseksi haasteeksi.

Vihjeitä:

T.1: [Geometrinen sarja, suhdeluku $q = e^{2\pi i/N}$.]

T.4: [Osittaisintegointi, Eulerin kaava.]

T.6: [Matki luentojen lauseen 2.6 todistusta!]