FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

12. HARJOITUKSET (ma .11, 12-14 salissa C124)

1. Onko funktio $f(x) := x\cos(x)$ jonkin distribuution $g \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ Fourier-muunnos? Jos on, niin määrää g.

2. Määritellään reaaliakselilla pääarvo-distribuutio $\mathbf{p.v.}x^{-2}$ asettamalla

$$\langle \mathbf{p.v.}x^{-2}, g\rangle := \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\mathbf{R}\setminus(-\varepsilon,\varepsilon)} \frac{g(x)-g(0)}{x^2}dx \qquad \text{kun} \quad g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}).$$

Osoita että kyseessä todella on temperoitu distribuutio. Joka haluaa (tätä ei vaadita tehtävässä) voi yrittää miettiä sen yhteyttä luennoilla määriteltyyn pääarvodistribuutioon $\mathbf{p.v.}x^{-1}$.

3. **(i)** Olkoon $A : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}^d$ kääntyvä lineaarikuvaus (jonka matriisia myös merkitsemme A:lla). Jos $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$, määritellään $g(x) = f(Ax)$. Osoita, että

$$\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{|\det(A)|}\widehat{f}((A^{-1})^T\xi),$$

missä $(A^{-1})^T$ on käänteismatriisin A:n transpoosi.

(ii) Osoita edellisen kohdan nojalla, että radiaalisen funktion $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ (siis $f(x)$ riippuu vain suureesta $|x|$) Fourier-muunnos on radiaalinen.

(iii) Näytä, että (ii)-kohdan tulos pätee myös kun $f \in L^2(\mathbf{R}^d)$.

4. **(i)** Jos $\gamma \in (0,d)$, näytä, että funktio $f_\gamma(x) := |x|^{-\gamma}$ määrittelee distribuution osoittamalla, että f_γ voidaan lausua kahden funktion summana, joista toinen kuuluu avaruuteen $L^1(\mathbf{R}^d)$ ja toinen avaruuteen $L^p(\mathbf{R}^d)$ sopivalla $p > 1$. Näytä, että voidaan valita $p = 2$ jos $\gamma > d/2$.

(ii) Todista kaava

$$\widehat{f_\gamma}(\xi) = c(d,\gamma)|\xi|^{\gamma-d}.$$

5. Laske Poissonin summakaavan avulla summa

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2+n^2}.$$

6* Määrää vakio $c(d,\gamma)$ tehtävässä 4.

Vihjeitä:

T.1: [Mieti ensin onko $\cos(x)$ jonkin distribuution Fourier-muunnos. Muista kaava Fourier-muunnoksen derivaatalle.]

T.3: [(ii):sovella (i)-kohtaa kun A on kiertomatriisi. (iii):ssa sopiva rajankäynti hyödyksi.]

T.4: [(ii)-kohdassa tarkastele ensin tapausta $\gamma > d/2$ ja totea (i)-kohdan nojalla, että silloin $\widehat{f_\gamma}$ on funktio. Tämän jälkeen sovella tehtävää 3 ja funktion f_γ skaalausominaisuutta $f_\gamma(tx) = t^{-\gamma} f_\gamma(x)$. Tapaus $\gamma < d/2$ selviää käänteimuunnoksen avulla, ja lopuksi $\gamma = d/2$ raja-arvoargumentilla.]