FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

11. HARJOITUKSET (pe 29.11, 12-14 salissa C124)

1. Muistuta mieleen Harj1/T7, jossa näytettiin että reaaliakselilla määritellyn funktion $e^{-\varepsilon|x|}$ Fourier-muunnos on $\dfrac{2\varepsilon}{\varepsilon^2+\xi^2}$. Mitä distribuutiota nämä funktiot lähestyvät kun $\varepsilon \to 0$? Mitä tulos kertoo kyseisen rajadistribuution Fourier-muunnoksesta?

2. **(i)** Olkoon $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Osoita, että avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ pätee $f_\varepsilon(x) \to f'(x)$ kun $\varepsilon \to 0^+$, missä $f_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1}\big(f(x+\varepsilon) - f(x)\big)$.

(ii) Näytä edellisen kohdan nojalla, että jokaiselle funktiolle $f \in L^1(\mathbf{R})$ pätee kun $\varepsilon \to 0$

$$\varepsilon^{-1}\big(f(x+\varepsilon) - f(x)\big) \to \frac{d}{dx}f,$$

missä $\frac{d}{dx}f$ on f:n derivaatta distribuutiomielessä.

3. Määritellään että distribuutio $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ on pariton jos pätee

$$\langle T, \widetilde{g}\rangle = -\langle T, g\rangle \qquad \text{kaikilla} \quad g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}),$$

missä $\widetilde{g}(x) := g(-x)$. Vastaavasti määritellään distribuution parillisuus (jolloin siis $\langle T, \widetilde{g}\rangle = \langle T, g\rangle$)

(i) Osoita, että tavallisen funktion $f \in L^1(\mathbf{R})$ määräämä distribuutio on pariton (vast. parillinen) jos ja vain jos f on pariton funktiona, eli $f(x) = -f(-x)$ (vast. $f(x) = f(-x)$) m.k. $x \in \mathbf{R}$.

(ii) Osoita, parillisen distribuution derivaatta on pariton. Totea tämän nojalla (olettamalla tehtävän 4 tulos), että distribuutio $\mathbf{p.v.}\big(\frac{1}{x}\big)$ on pariton.

4. Osoita, että funktio $x \to \log|x|$ määrittelee temperoidun distribuution reaaliakselilla ja sen distribuutio-derivaatalle pätee

$$\frac{d}{dx}\big(\log|x|\big) = \mathbf{p.v.}\big(\frac{1}{x}\big).$$

5. Todista lause 12.4: Lineaarinen kuvaus $T : \mathcal{S}(\mathbf{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ on jatkuva $\Leftrightarrow$ Jokaiselle $N \in \mathbf{N}$ löytyy $M \in \mathbf{N}$ ja vakio $C = C_{N,M}$ s.e.

$$p_N(Tf) \ \le\ Cp_M(f), \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d). \tag{1}$$

6* **(i)** Määritellään $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ asettamalla $f(x) = e^x$. Vaikka f on lokaalisti integroituva, osoita ettei se määrittele avaruuden $S'(\mathbf{R})$ alkiota luonnollisessa mielessä: osoita, että on olemassa jono $g, g_1, g_2, \ldots \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ niin että $g_k \to g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$, integraalit $\int_R e^x g_k(x)dx$ ovat hyvin määriteltyjä kun $k = 1, 2, \ldots$, mutta

$$\int_R e^x g(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_R e^x g_k(x)dx = \infty.$$

(ii) Osoita, että sen sijaan funktio $f(x) = e^x \cos(e^x)$ määrittelee temperoidun distribuution T reaaliakselilla, kun asetetaan

$$\langle T, g\rangle := \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} e^x \cos(e^x) g(x)dx \qquad \text{kun} \quad g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}).$$