FOURIER ANALYYSI. (syksy 2013)

10. HARJOITUKSET (pe 22.11, 12-14 salissa C124)

1. Näytä, että luennoilla annettu kaava

$$\rho(f,g) := \sum_{N=0}^{\infty} 2^{-N} \frac{p_N(f-g)}{1+p_N(f-g)}, \qquad \text{kun } f,g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d).$$

määrittelee metriikan testifunktioiden avaruudessa $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

2. Näytä, että metrinen avaruus $(\mathcal{S}(\mathbf{R}^d), \rho)$ (eli testifunktioiden avaruus varustettuna metriikalla ρ) on täydellinen.

3. Osoita esimerkillä, ettei Hadamardin lause päde (Lause 11.5) päde pelkästään olettamalla: f on analyyttinen vyöhykkeessä $\{z \in \mathbf{C} \ : \ 0 < x < 1\}$, jatkuva reunalle asti, ja lisäksi pätee $|f(iy)| \leq M_1$ sekä $|f(1+iy)| \leq M_1$ kaikilla $y \in \mathbf{R}$.

4. (i) Olkoon $a \in \mathbf{R}^d$. Osoita, että $T \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^d)$, missä

$$\langle T, \phi \rangle := \int_{-1}^{1} \phi(at)dt$$

kun $\phi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.

(ii) Osoita, että $S \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$, missä

$$\langle T, \phi \rangle := \sum_{k \in \mathbf{Z}} f(k).$$

5. Olkoon $f \in C^\infty(\mathbf{R}^d)$ sellainen, että jokaiselle multi-indeksille α löytyy $M = M_\alpha$ ja $C = C_\alpha$ niin että

$$|\partial^\alpha f(x)| \leq C(1+|x|^2)^M \quad \text{kaikilla } x \in \mathbf{R}^d.$$

Osoita että $fg \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ kaikilla $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$ ja että kuvaus $g \mapsto fg$ on jatkuva lineaarikuvaus $\mathcal{S}(\mathbf{R}^d)$.