Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Differentiaaliyhtälöt II
Korvaava kurssikoe 17.1.2014

Huom. Tenttijällä saa olla A4-arkin kokoinen tiivistelmä mukanaan tentissä.

1. Määrää seuraavalle homogeenisysteemille perusjärjestelmä $\mathbf{R}$:ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

2. Palauta 2.kl. differentiaaliyhtälö

$$\ddot{x}(t) = x(t)^2 + x(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t)^2 - 1$$

normaalimuotoiseksi 1.kl. systeemiksi, määrää tämän kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili).

3. Anna seuraavan systeemin yleinen ratkaisu:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 1/2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} e^{3t} \\ -e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Huom. Tehtävästä 1 on hyötyä.

4. Tarkastellaan autonomista paria

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x(t), y(t)) \\ \dot{y}(t) &= g(x(t), y(t)), \end{aligned}$$

jossa $f = f(x, y)$ ja $g = g(x, y)$ ovat jatkuvasti derivoituvia funktioita. Olkoot $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ ja $\mathbf{w}(t) = (u(t), v(t))$ sen kaksi ratkaisua, joille joissakin pisteissä $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$ pätee

$$\mathbf{z}(t_1) = \mathbf{w}(t_2).$$

Osoita että tällöin

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{w}(t - t_1 + t_2) \quad \text{kaikilla } t, \text{ joilla kumpikin puoli on olemassa.}$$