

Differentiaaliyhtälöt II

Harjoitus 5, syksy 2013

1. Etsi seuraavalle homogeenisysteemille \mathbf{R} :ssä perusjärjestelmä matriisikeinolla, joka soveltaa yleistettyjä ominaisvektoreita:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Ohje. Luentomonisteen yhtälöt (5.31) ja (5.32).

2. Etsi matriisikeinolla (joka soveltaa yleistettyjä ominaisvektoreita) \mathbf{R} :ssä perusjärjestelmä systeemille

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{3 \times 3}.$$

3. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili):

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2y - 2 \\ \dot{y} &= -x - 2y. \end{aligned}$$

4. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -2x + y + 6 \\ \dot{y} &= -x + 2y - 3. \end{aligned}$$

5. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 2x^2 - 2y \\ \dot{y} &= -4 + 5x^2 - y^2. \end{aligned}$$

6. Määrää seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (x + 1)(y - 2) \\ \dot{y} &= x^2 - x - 2. \end{aligned}$$

Mitä Poincarén lause kertoo kriittisten pisteiden laadusta? Määritä myös systeemin radat.