

## Differentiaaliyhtälöt II

Harjoitus 3, syksy 2013

1. Etsi seuraavalle  $2 \times 2$ -homogeeisisysteemin perusjärjestelmä  $\mathbf{R}$ :ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

2. Etsi seuraavalle  $2 \times 2$ -homogeeisisysteemille perusjärjestelmä  $\mathbf{R}$ :ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Kirjoita myös perusmatriisi.

3. Osoita että funktiopari  $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = ([1 \ e^t]^T, [e^{-t} \ 2]^T)$  on lineaarisen  $2 \times 2$ -homogeenisysteemin

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

perusjärjestelmä  $\mathbf{R}$ :ssä.

4. Etsi seuraavalle  $3 \times 3$ -homogeenisysteemille perusjärjestelmä  $\mathbf{R}$ :ssä:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

5. Olkoon funktio  $y$  AAT:n

$$y' = e^x \sin x \cos y, \quad y(0) = 0,$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita globaalin OY-lauseen 4.6 avulla, että funktio  $y$  on määritelty (eli hengissä) koko  $\mathbf{R}$ :ssä.

Ohje. Väliarvolause.

6. Olkoon funktio  $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$  parin AAT:n

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+y)(x^2+y^2-1) \\ (t-x)(x^2+y^2-1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}(0) = (1/2, 1/2),$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita systeemien Poistumislauseen (= lauseen 4.7 analogia) avulla, että funktio  $\mathbf{z}$  on hengissä koko  $\mathbf{R}$ :ssä.

Ohje. Triviaaliratkaisut. Kuva  $txy$ -koordinaatistossa voi auttaa. Oikeastaan topologiasta tarvitaan avuksi Reunanylityslause.