

**Differentiaaliyhtälöt II**  
Harjoitus 2, syksy 2013

1. Palauta seuraavat skalaariyhtälöt 1.kl. systeemeiksi:

(a)  $y'' + y' \sin x + y' = y \cos x$ ,    (b)  $y^{(3)} + x^3 \cos(y') = \sin x$ .

Mitkä näistä ovat lineaarisia?

2. Palauta seuraava 2.kl. systeemi normaalimuotoiseksi 1.kl. systeemiksi:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_1(t) + 2kx_1(t) - kx_2(t) &= 0 \\ m\ddot{x}_2(t) - kx_1(t) + 2kx_2(t) &= 0. \end{aligned}$$

3. (a) Palauta seuraava systeemi normaalimuotoiseksi 1.kl. systeemiksi:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f(t, x, y, \dot{x}) \\ \dot{y} &= g(t, x, y). \end{aligned}$$

(b) Entä jos ensimmäinen yhtälö kuuluukin

$$\ddot{x} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})?$$

4. Osoita että yhdelläkään pisteellä  $(x, -1)$ , missä  $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ , ei ole ympäristöä (ei kyllä myöskään kun  $x = 0$ ), jossa funktio

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x(x-1)(y+1)}$$

on tasaisesti Lip-jatkuva muuttujan  $y$  suhteen (vrt. harjoituksen 1 tehtävä 6).

5. Esitä seuraava  $2 \times 2$ -homogeenisysteemi perinteellisesti auki kirjoitettuna ja ratkaise se:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} 2t & 3t^2 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \mathbf{z}(t).$$

6. Harjoituksen 1 tehtävän 1 yleisessä ratkaisussa on neljä parametria. Osoita sitovasti että tuo ratkaisu antaa kyseisen differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut.

Ohje. Lause 5.4, tai jos haluat palauttaa systeemiksi, lause 5.3 (tai 5.5).