Differentiaaliyhtälöt II
Harjoitus 1, syksy 2013

1. Ratkaise mukauttamalla lineaarista 2.kl. teoriaa seuraava lineaarinen 4.kl. homogeeniyhtälö:

$$4y^{(4)} - 16y'' - 9y = 0.$$

Ei tarvitse (pilkun)tarkkaan perustella, että saat yhtälön kaikki ratkaisut.

2. Olkoot $y_1 : I \to \mathbf{R}$ ja $y_2 :\to \mathbf{R}$ derivoituvia funktioita välillä I, ja päteköön $W(y_1, y_2)(x) = 0$ ja $y_1(x) \neq 0 \neq y_2(x)$ kaikilla $x \in I$. Osoita että tällöin funktiot y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippuvia, siis yhtälö $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$, $x \in I$, toteutuu joillakin vakioilla c_1, c_2, joista ainakin toinen on $\neq 0$.

Ohje. Differentiaaliyhtälö (yksi).

3. Määrää neljä ensimmäistä Picardin approksimaattia AAT:lle

$$(a) \quad y' = y + 1,\ y(0) = -1, \quad (b) \quad y' = y + 1,\ y(0) = 0.$$

4. Ratkaise edellisen tehtävän AAT:t eksaktisti ja vertaa Picardin approksimaatteihin. Miltä näyttää?

5. Onko funktio $f(x, y) = y^3 \sin x \big/ (1 + y^2)$ joukossa $I \times J$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen, kun

(a) $I = [0, 1]$ ja $J = [0, 1]$,

(b) $I = \mathbf{R}$ ja $J = [0, 1]$,

(c) $I = [0, 1]$ ja $J = [0, \infty[$?

Perustelut. Jos on, niin anna (jokin) käypä Lip-vakio.

6. Missä $\mathbf{R}^2$:n mahdollisimman suurissa alueissa DY

$$y' = f(x, y) = \sqrt[3]{x(x-1)(y+1)}$$

toteuttaa lokaalin OY-lauseen 4.4 ehdot? Perustele lyhyesti ehtojen voimassaolo niissä, mutta ei sitä että jossain ne eivät ole voimassa.

Huom. DY on määritelty koko xy-tasossa $\mathbf{R}^2$.