Diff.yht. II, harj. 5, 3.&5.12.2013, ratk. (Jouni Luukkainen), 5 tekstisivua ja 1 kuvasivu

OIKAISU. Osittaisderivoinnin symboli ∂ on (ainakin melkein) venäjän kielen aakkoston pieni d-kirjain, mutta ei sittenkään kaunokirjoituksessa, kuten olen aina väittänyt, vaan kursivoidussa painotekstissä (kuten olen nähnytkin)! Kiitos opiskelijalle, joka kiisti väärän väitteeni!

Teht. 1. *Etsi seuraavalle homogeenisysteemille $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä matriisikeinolla, joka soveltaa yleistettyjä ominaisvektoreita:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t). \tag{1}$$

Ohje. *Luentomonisteen yhtälöt* (5.31) *ja* (5.32).

Ratk. Matriisin $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$ karakteristisella yhtälöllä $\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2+4\lambda+4 = (\lambda+2)^2 = 0$ on kaksoisjuuri $\lambda = -2$. Määritetään ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$:

$$(A+2I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} u_1 + u_2 = 0 \\ -u_1 - u_2 = 0 \end{cases} \iff u_2 = -u_1 \iff \mathbf{u} = a \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Täten A:n ominaisvektoreista ei voida valita kantaa $\mathbb{R}^2$:lle. Siis perusjärjestelmää ei saada suoraan matriisikeinolla. Valinnalla $a = 1$ eli $\mathbf{u} = [\,1 \quad -1\,]^T$ tulee kuitenkin yksi ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{-2t}\mathbf{u} = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$ perusjärjestelmään.

Perusjärjestelmän toisen ratkaisun $\mathbf{x}_2$ löytämiseksi valitaan vektori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, joka ei ole A:n ominaisvektori eli jolle $(A+2I)\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ eli jolle siis $\mathbf{v} \nparallel \mathbf{u}$, ja etsitään ratkaisu $\mathbf{x}_2$ alkuehdolla $\mathbf{x}_2(0) = \mathbf{v}$ muodossa

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{tA}\mathbf{v} = e^{-2tI}e^{t(A+2I)}\mathbf{v} = e^{-2t}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} t^n (A+2I)^n\right)\mathbf{v} = e^{-2t}(\mathbf{v} + t(A+2I)\mathbf{v} + \frac{1}{2}t^2(A+2I)^2\mathbf{v} + \cdots).$$

Sarjan katkeamiseksi, ja mahdollisimman pian, vaaditaan nyt, että $(A+2I)^2\mathbf{v} = \mathbf{0}$ eli että $\mathbf{v}$ on A:n ominaisarvoon $\lambda = -2$ liittyvä A:n yleistetty ominaisvektori. Tämä ehto ei rajoita $\mathbf{v}$:n valintaa, sillä itse asiassa (mikä, kuten voidaan osoittaa, ei ole sattumaa)

$$(A+2I)^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Voidaan siis valita $\mathbf{v} = [\,1 \quad 0\,]^T$. Näin saadaan

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t}(\mathbf{v} + t(A+2I)\mathbf{v}) = e^{-2t}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}) = e^{-2t}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1+t \\ -t \end{bmatrix}.$$

Olisi helppo sijoittamalla todeta, että $\mathbf{x}_2$ on todellakin ratkaisu. Tietysti $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(0) = \det[\,\mathbf{u} \quad \mathbf{v}\,] \neq 0$.

Huom. Osoitetaan, että yleistettyjä ominaisvektoreita käyttäen konstruoidut ratkaisut ovat todellakin ratkaisuja. Olkoon siis $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^n$, $m \in \mathbb{N}$, $(A-\lambda I)^m\mathbf{u} = \mathbf{0}$ ja

$$\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\mathbf{u} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Tällöin $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}$ ja

$$A\mathbf{x}(t) = \lambda I\mathbf{x}(t) + (A-\lambda I)\mathbf{x}(t) = \lambda\mathbf{x}(t) + e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^{k+1}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{x}(t) + e^{\lambda t}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}(A-\lambda I)^k\mathbf{u}$$

$$= \left(\frac{d}{dt}e^{\lambda t}\right)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\mathbf{u} + e^{\lambda t}\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k}{k!}(A-\lambda I)^k\mathbf{u} = \dot{\mathbf{x}}(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Ei siis tarvittu päättymätöntä potenssisarjaa $e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}(t^k/k!)A^k$ ja tietoa $(d/dt)e^{tA} = Ae^{tA}$.

Teht. 2. *Etsi matriisikeinolla (joka soveltaa yleistettyjä ominaisvektoreita) $\mathbb{R}$:ssä perusjärjestelmä systeemille*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Ratk. Etsitään A:n ominaisarvot:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \overset{\text{s1}}{=} (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= (1-\lambda)(\lambda^2-2\lambda) - 2(2-\lambda) = -(\lambda-2)(\lambda^2-\lambda-2) = -(\lambda+1)(\lambda-2)^2 = 0.$$

Etsitään ominaisarvoja $\lambda = -1$ ja $\lambda = 2$ vastaavat ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. Sievennetään ensin kerroinmatriiseja alkeisrivioperaatioin, joiden valinnan voi havaita laskusta:

$$A-(-1)I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$
$$A-2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Täten

$$(A-(-1)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_1 = -(3/2)u_3 \text{ ja } u_2 = 2u_3 \iff \mathbf{u} = s(-3,4,2) \quad (s\in\mathbb{R});$$
$$(A-2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_1 = 0 \text{ ja } u_2 = -u_3 \iff \mathbf{u} = s(0,1,-1) \quad (s\in\mathbb{R}).$$

Saadaan siis ratkaisut $\mathbf{x}_1(t) = e^{-t}\begin{bmatrix} -3 & 4 & 2 \end{bmatrix}^T$ ja $\mathbf{x}_2(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ etsittävään perusjärjestelmään. Etsitään ominaisarvoon $\lambda = 2$ liittyvät yleistetyt ominaisvektorit ratkaisemalla yhtälö $(A-2I)^2\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Sievennetään ensin kerroinmatriisia alkeisrivioperaatioin:

$$(A-2I)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & -3 \\ -4 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \curvearrowright \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Täten

$$(A-2I)^2\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_1 = u_2 + u_3 \iff \mathbf{u} = \begin{bmatrix} s_1+s_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = s_1\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s_2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (s_1, s_2 \in \mathbb{R}).$$

(Ominaisvektori $\mathbf{u} = (0,1,-1)$ vastaa tapausta $(s_1,s_2) = (1,-1)$.) Valitaan esimerkiksi $\mathbf{u} = (1,1,0) \nparallel (0,1,-1)$. Tällöin saadaan etsittävään perusjärjestelmään kolmas ratkaisu

$$\mathbf{x}_3(t) = e^{2t}(\mathbf{u} + t(A-2I)\mathbf{u}) = e^{2t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = e^{2t}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1+t \\ -t \end{bmatrix}.$$

Teht. 3. *Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu (stabiili vai epästabiili):*

$$\dot{x} = 2y - 2$$
$$\dot{y} = -x - 2y.$$

Ratk. Kyseessä on epähomogeeninen lineaarinen systeemi tasossa $\mathbb{R}^2$. Systeemillä on tasan yksi kriittinen piste:

$$\begin{cases} 2y - 2 = 0 \\ -x - 2y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = \underline{(-2, 1)}.$$

Määritetään kriittisen pisteen $(-2, 1)$ laatu vastaavan homogeenisen systeemin $\dot{\mathbf{z}}(t) = A\mathbf{z}(t)$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$, kriittisen pisteen $(0, 0)$ laatuna A:n ominaisarvoja käyttäen:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2 + 1 = 0 \iff \lambda = -1 \pm i.$$

Koska $\operatorname{Re}(-1 \pm i) = -1 < 0$, on kriittinen piste <u>stabiili</u> (jopa <u>asymptoottisesti stabiili</u>). Koska $\operatorname{Im}(-1 \pm i) = \pm 1 \neq 0$, radat lähestyvät pistettä $(-2, 1)$ spiraalimaisesti.

Teht. 4. *Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:*

$$\dot{x} = -2x + y + 6$$
$$\dot{y} = -x + 2y - 3.$$

Ratk. Kyseessä on epähomogeeninen lineaarinen systeemi tasossa $\mathbb{R}^2$. Määritetään systeemin kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} -2x + y + 6 = 0 \\ -x + 2y - 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}.$$

Kriittisiä pisteitä on siis tasan yksi, $\underline{(5, 4)}$. Systeemin matriisin $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ ominaisarvot:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3 = 0 \iff \lambda = \pm\sqrt{3}.$$

Ominaisarvot ovat reaaliset ja erimerkkiset. Siksi kriittinen piste on <u>epästabiili</u> (<u>satulapiste</u>).

Teht. 5. *Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet ja niiden laatu:*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x^2 - 2y \\ \dot{y} = -4 + 5x^2 - y^2. \end{cases}$$

Ratk. Kuvaukset $f, g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 - 2y$ ja $g(x, y) = -4 + 5x^2 - y^2$, ovat jatkuvasti derivoituvia. Kriittiset pisteet (x, y):

$$\begin{cases} f(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 1 \end{cases} \text{tai} \begin{cases} x = \pm 2 \\ y = 4 \end{cases}$$
$$\iff \underline{(x, y) \in \{(1, 1), (-1, 1), (2, 4), (-2, 4)\}}.$$

Kuvauksen (f, g) derivaatan matriisi pisteessä (x, y) on $A(x, y) = \begin{bmatrix} D_1 f(x, y) & D_2 f(x, y) \\ D_1 g(x, y) & D_2 g(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x & -2 \\ 10x & -2y \end{bmatrix}$.

Matriisien

$$A(1, 1) = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}, \quad A(-1, 1) = \begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -10 & -2 \end{bmatrix}, \quad A(2, 4) = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 20 & -8 \end{bmatrix}, \quad A(-2, 4) = \begin{bmatrix} -8 & -2 \\ -20 & -8 \end{bmatrix}$$

ominaisarvot:

$$\det(A(1,1)-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 \\ 10 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 12 = (\lambda-1)^2 + 11 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 1 \pm i\sqrt{11};$$

$$\det(A(-1,1)-\lambda I) = \begin{vmatrix} -4-\lambda & -2 \\ -10 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 6\lambda - 12 = (\lambda+3)^2 - 21 \Longleftrightarrow \lambda = -3 \pm \sqrt{21};$$

$$\det(A(2,4)-\lambda I) = \begin{vmatrix} 8-\lambda & -2 \\ 20 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 24 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = \pm\sqrt{24};$$

$$\det(A(-2,4)-\lambda I) = \begin{vmatrix} -8-\lambda & -2 \\ -20 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+8)^2 - 40 = \lambda^2 + 16 + 24 = 0 \Longleftrightarrow \lambda = -8 \pm \sqrt{40}.$$

Kriittinen piste $\underline{(1,1) \text{ on epästabiili}}$, sillä $\mathrm{Re}(1 \pm i\sqrt{11}) = 1 > 0$. Kriittiset pisteet $(-1,1)$ ja $(2,4)$ ovat epästabiileja (satulapisteitä), sillä kummallakin niistä $A(x,y)$-matriisin ominaisarvot ovat reaaliset ja erimerkkiset. Kriittinen piste $(-2,4)$ on stabiili (jopa asymptoottisesti stabiili), sillä molemmat ominaisarvot ovat negatiiviset.

Teht. 6. *Määritä seuraavan autonomisen systeemin kriittiset pisteet:*

$$\begin{cases} \dot{x} = (x+1)(y-2) \\ \dot{y} = x^2 - x - 2. \end{cases}$$

Mitä Poincarén lause kertoo kriittisten pisteiden laadusta? Määritä myös systeemin radat.

Ratk. Luonnostellaan lisäksi virtauskuvio piirtämällä ratoja virtaussuuntineen, koska tarvitsemme tätä eräiden kriittisten pisteiden laadun selvittämiseksi.

Olkoon $f(x,y) = (x+1)(y-2)$ ja $g(x,y) = x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$, kun $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Kriittiset pisteet:

$$\begin{cases} f(x,y) = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ tai } y = 2 \\ x = -1 \text{ tai } x = 2 \end{cases} \Longleftrightarrow (x,y) = \underline{(-1,s)} \text{ jollain } s \in \mathbb{R} \text{ tai } (x,y) = \underline{(2,2)}.$$

Suoran $x = -1$ jokainen piste on kriittinen piste; kyseessä on *kriittinen suora*.

Jokaiseen kriittiseen pisteeseen liittyy pistemäinen rata.

Määritetään radat kriittisten pisteiden joukon komplementissa $G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq -1,\ (x,y) \neq (2,2)\}$. Radat joukon $f(x,y) = 0$ eli suorien $x = -1$ ja $y = 2$ ulkopuolella saadaan separoituvasta differentiaaliyhtälöstä:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{g(x,y)}{f(x,y)} = \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(y-2)} = \frac{x-2}{y-2} \Longleftrightarrow \int (y-2)\,dy = \int (x-2)\,dx$$
$$\Longleftrightarrow \tfrac{1}{2}(y-2)^2 = \tfrac{1}{2}(x-2)^2 + C_0 \ (C_0 \in \mathbb{R}) \overset{C=-2C_0}{\Longleftrightarrow} \underline{(x-2)^2 - (y-2)^2 = C} \ (C \in \mathbb{R}).$$

Joukon $g(x,y) = 0$ eli suorien $x = -1$ ja $x = 2$ ulkopuolella saadaan radoille separoituva differentiaaliyhtälö $dx/dy = f(x,y)/g(x,y) = (y-2)/(x-2)$, jolloin tulee sama yhtälö $\int (y-2)\,dy = \int (x-2)\,dx$ ja sama lopullinen käyrä kuin yllä. Näin saatiin radoista joukossa G selvitettyä myös ehdon $f(x,y) \neq 0$ poistamat pisteet.

Jos $C \neq 0$, tämä käyrä on C:n merkin mukaan jompikumpi hyperbeleistä

$$\frac{(x-2)^2}{(\sqrt{|C|})^2} - \frac{(y-2)^2}{(\sqrt{|C|})^2} = \pm 1;$$

jos taas $C = 0$, tämä käyrä on näiden hyperbeliparvien yhteiset aymptoottisuorat

$$(y-2) = \pm(x-2).$$

Nämä radat ovat kriittisten pisteiden näiden hyperbelien haaroista ja niiden asymptooteista erottamilla yhtenäisillä avoimilla kaarilla. Itse asiassa nämä avoimet kaaret ovat kokonaisia ratoja, mikä nähdään seuraavasti. Olkoon $(x(\cdot), y(\cdot)) \colon \Delta \to \mathbb{R}^2$ maksimaalinen ratkaisu ja $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ välin Δ päätepiste. Funktioista $x(\cdot)$ ja $y(\cdot)$ ainakin toinen on monotoninen, kuten jäljempänä oleva f:n ja g:n merkkien tutkiminen osoittaa, joten ainakin toinen raja-arvoista

$$x_\alpha = \lim_{t \to \alpha} x(t) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \qquad \text{ja} \qquad y_\alpha = \lim_{t \to \alpha} y(t) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

on olemassa, jolloin radan yhtälöstä seuraa, että toinenkin on olemassa ja pätee $x_\alpha \in \mathbb{R} \iff y_\alpha \in \mathbb{R}$. Tapauksessa $(x_\alpha, y_\alpha) \in \mathbb{R}^2$ seuraa 1. kl. systeemien poistumislauseesta, että $\alpha = -\infty$ tai $\alpha = \infty$; tästä puolestaan seuraa Lauseen 6.4 nojalla, että (x_α, y_α) on kriittinen piste. *Täten jokainen äsken mainittu avoin kaari on kokonainen rata.*

Suoralla $y = 2$ on $f(x, y) = 0$ (eli virtauksella on alustavasti suunta $|$) ja $g(x, y) = (x + 1)(x - 2) > 0$ (eli virtauksella on suunta $\uparrow$), jos $x < -1$ tai $x > 2$, ja $g(x, y) < 0$ (eli virtauksella on suunta $\downarrow$), jos $-1 < x < 2$. Suoralla $x = 2$ on $g(x, y) = 0$ (eli virtauksella alustavasti suunta $-$) ja $f(x, y) = 3(y - 2) > 0$ (eli virtauksella suunta $\rightarrow$), jos $y > 2$, ja $f(x, y) < 0$ (eli virtauksella suunta $\leftarrow$), jos $y < 2$. Alueissa $G_1 = \{(x, y) \in G \mid x < -1\}$ ja $G_2 = \{(x, y) \in G \mid x > -1\}$ eivät f ja g voi jatkuvina funktioina vaihtaa merkkiään muualla kuin suorilla $y = 2$ ja $x = 2$, mikä polynomeista f ja g nähdään suoraankin. Saaduista viidestä nuolesta (**Kuvio 1**) voidaan siis ratojen kulkusuunta määrittää (**Kuvio 2**).

Vaihtoehtoisesti ennen ratojen kulkusuunnan määrittämistä voidaan ensin selvittää f:n ja g:n merkkiyhdistelmät $++$, $+-$, $--$ tai $-+$ suorien $x = -1$, $x = 2$ ja $y = 2$ rajaamissa alueissa ja piirtää näiden nojalla virtauksen suunta näissä alueissa muodossa $\nearrow$, $\searrow$, $\swarrow$ tai $\nwarrow$ (**Kuvio 3**). Suorilla $y = 2$ ja $x = 2$ virtauksen suunta määräytyy näistä f:n ja g:n jatkuvuuden perusteella muodossa $\uparrow$, $\downarrow$, $\rightarrow$ tai $\leftarrow$.

Kuvauksen (f, g) derivaatalla pisteessä $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ on matriisi $A(x, y) = \begin{bmatrix} y - 2 & x + 1 \\ 2x - 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Nyt $A(2, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, joten $\det(A(2, 2) - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 \\ 3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = 0 \iff \lambda = \pm 3$; siis matriisin $A(2, 2)$ ominaisarvot ovat erimerkkiset, jolloin Poincarén lauseen nojalla kriittinen piste $(2, 2)$ on <u>epästabiili (satulapiste)</u>. Tämä nähdään myös kuviosta 2.

Toisaalta, kun $s \in \mathbb{R}$, niin $A(-1, s) = \begin{bmatrix} s - 2 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ on alakolmiomatriisi, joten sen ominaisarvot ovat lävistäjän alkiot $\lambda_1 = s - 2$ ja $\lambda_2 = 0$; tällöin on myös $\det A(-1, s) = 0$. Siis <u>Poincarén lause ei tähän tapaukseen sovellu</u>. Mutta kuviosta 2 nähdään, että kriittinen piste $(x, y) = (-1, s)$ on <u>epästabiili</u>, jos $s \geq 2$, ja <u>stabiili, mutta ei asymptoottisesti stabiili</u>, jos $s < 2$.

Huom. Samaa rataa vastaavat systeemin eri maksimaaliset ratkaisut poikkeavat systeemin autonomisuuden ja systeemien OY-lauseen nojalla toisistaan vain ajan t siirrolla: Jos $(x(\cdot), y(\cdot)) \colon \Delta \to \mathbb{R}^2$ on maksimaalinen ratkaisu, niin saman radan antavat maksimaaliset ratkaisut saadaan valitsemalla $s \in \mathbb{R}$, asettamalla $\Delta_s = \Delta + s$ ja määrittelemällä $(x_s(t), y_s(t)) = (x(t - s), y(t - s))$, kun $t \in \Delta_s$.