Diff.yht. II, harj. 3, 19.&21.11.2013, ratk. (Jouni Luukkainen), 4 sivua

Teht. 1. *Etsi seuraavalle* 2×2*-homogeenisysteemille perusjärjestelmä* $\mathbb{R}$*:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Ratk. Kerroinmatriisi $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$ on vakiokertoiminen. Sen karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 4 = 0$ juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_{1,2} = \pm 2$. Etsitään näitä A:n ominaisarvoja vastaavat A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ (ynnä ominaisavaruuden alkio $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, joka ei ole ominaisvektori) sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda_1 = 2$: $(A - 2I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} -u_1 + u_2 = 0 \\ 3u_1 - 3u_2 = 0 \end{cases} \iff u_1 = u_2 \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ ($c \in \mathbb{R}$). Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = -2$: $(A - (-2)I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} 3u_1 + u_2 = 0 \\ 3u_1 + u_2 = 0 \end{cases} \iff u_2 = -3u_1 \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ ($c \in \mathbb{R}$). Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nyt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Teht. 2. *Etsi seuraavalle* 2×2*-homogeenisysteemille perusjärjestelmä* $\mathbb{R}$*:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Kirjoita myös perusmatrisi.

Ratk. Kerroinmatriisi $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ on vakiokertoiminen. Sen karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -3-\lambda & 2 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 4 = (\lambda - 1)(\lambda + 4) = 0$ juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_1 = 1$ ja $\lambda_2 = -4$. Etsitään näitä A:n ominaisarvoja vastaavat A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda_1 = 1$: $(A - I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff u_2 = 2u_1 \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ($c \in \mathbb{R}$). Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda_2 = -4$: $(A + 4I)\mathbf{u} = \mathbf{0} \iff \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff u_1 = -2u_2 \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($c \in \mathbb{R}$). Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^{-4t} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Nyt $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. Siitä saadaan systeemille perusmatriisi

$$X(t) = [\, \mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \,] = \begin{bmatrix} e^t & 2e^{-4t} \\ 2e^t & -e^{-4t} \end{bmatrix} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Teht. 3. *Osoita, että funktiopari* $(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \left([\, 1 \quad e^t \,]^T, [\, e^{-t} \quad 2 \,]^T \right)$ *on lineaarisen* 2×2*-homogeenisysteemin*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Ratk. Olkoon $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Tällöin funktio $A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ on jatkuva. Koska

$$A(t)\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + (-e^{-t})e^t \\ 2e^t \cdot 1 + (-1)e^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} 1 \\ e^t \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_1(t) \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

niin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä. Samoin $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ ratkaisu $\mathbb{R}$:ssä, sillä

$$A(t)\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 1 & -e^{-t} \\ 2e^t & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - 2e^{-t} \\ 2-2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^{-t} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} e^{-t} \\ 2 \end{bmatrix} = \dot{\mathbf{x}}_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Lisäksi pari $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on vapaa $\mathbb{R}$:ssä, sillä sen Wronskin determinantille on

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)(t) = \det(\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t)) = \begin{vmatrix} 1 & e^{-t} \\ e^t & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot 2 - e^t e^{-t} = 2 - 1 = 1 \neq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Täten $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ on yhtälön $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Teht. 4. *Etsi seuraavalle* 3×3*-homogeenisysteemille perusjärjestelmä* $\mathbb{R}$*:ssä:*

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

Ratk. Olkoon $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$. Lasketaan A:n ominaisarvot. Karakteristisen yhtälön $\det(A - \lambda I) =$
$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 3-\lambda \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 2-\lambda & -4 \\ 2 & 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} =$
$(3-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ -1+\lambda & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} -2-\lambda & -4 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda)(1-\lambda) = -(\lambda-3)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0$
(jossa lisättiin kolmas rivi ensimmäiseen riviin, vähennettiin ensimmäinen sarake kolmannesta sarakkeesta, kehitettiin ensimmäisen rivin mukaan, vähennettiin ensimmäinen rivi toisesta rivistä ja lisättiin toinen sarake ensimmäiseen sarakkeeseen) juuret ovat erisuuret reaaliluvut $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 1$ ja $\lambda_3 = -2$. **Vaihtoehtoisesti** voidaan ensin laskea determinantti muodossa $\det(A-\lambda I) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 5\lambda - 6$ ja sitten etsiä sen rationaaliset nollakohdat kertoimen -6 tekijöiden ± 1, ± 2, ± 3 ja ± 6 joukosta.

Etsitään näitä A:n ominaisarvoja λ vastaavat A:n ominaisvektorit $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3$ sekä systeemin ratkaisut $\mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\mathbf{u}$:

$\lambda = 3$: $(A - 3I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \overset{1)}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \overset{2)}{\Longleftrightarrow} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{u} =$
$\mathbf{0} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_3 \\ u_2 = 2u_3 \end{cases} \Longleftrightarrow \mathbf{u} = c\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa 1) lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen ja toiseen yhtälöön sekä 2) lisättiin toinen yhtälö luvulla $-2/5$ kerrottuna kolmanteen yhtälöön ja tämän jälkeen toinen yhtälö jaettiin 5:llä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_1(t) = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda = 1$: $(A - I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \overset{1)}{\iff} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \overset{2)}{\iff} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff$ $\begin{cases} u_1 = -u_3 \\ u_2 = 4u_3 \end{cases} \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa 1) lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen yhtälöön ja vähennettiin kolmas yhtälö toisesta yhtälöstä sekä 2) vähennettiin toinen yhtälö 2:lla kerrottuna ensimmäisestä ja kolmannesta yhtälöstä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_2(t) = e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

$\lambda = -2$: $(A + 2I)\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \overset{1)}{\iff} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 5 \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \overset{2)}{\iff} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u} = \mathbf{0} \iff u_3 =$ $u_2 = -u_1 \iff \mathbf{u} = c \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $(c \in \mathbb{R})$, jossa 1) lisättiin kolmas yhtälö ensimmäiseen ja toiseen yhtälöön ja 2) jaettiin ensimmäinen ja toinen yhtälö 5:llä sekä vähennettiin saadut uudet yhtälöt kolmannesta yhtälöstä. Valitsemalla $c = 1$ saadaan ratkaisu $\mathbf{x}_3(t) = e^{-2t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$.

Näin ollen $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$ on systeemin perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä.

Teht. 5. *Olkoon funktio y AAT:n*

$$y' = e^x \sin x \cos y, \quad y(0) = 0,$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita globaalin OY-lauseen 4.6 avulla, että funktio y on määritelty (eli hengissä) koko $\mathbb{R}$:ssä.

Ohje. *Väliarvolause.*

Ratk. Olkoon $f(x, y) = e^x \sin x \cos y$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Tällöin f on jatkuva, ja $(\partial/\partial y) f(x, y) = -e^x \sin x \sin y$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Olkoon $a > 0$. Jos $|x| \le a$ ja $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, $y_1 < y_2$, niin väliarvolauseen perusteella on olemassa $\eta \in]y_1, y_2[$, jolla

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \frac{\partial}{\partial y} f(x, \eta)(y_1 - y_2) \right| = e^x |\sin x| |\sin \eta| |y_1 - y_2| \le e^a |y_1 - y_2|.$$

Täten f on suorakaiteessa $[-a, a] \times \mathbb{R}$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva (nimittäin e^a-Lipschitz-jatkuva) muuttujan y suhteen. Siis globaalin OY-lauseen 4.6 oletukset ovat voimassa x:ää koskevalla välillä $I = \mathbb{R}$, joten AAT:n (maksimaalinen) ratkaisu y on (olemassa, yksikäsitteinen ja) määritelty koko $\mathbb{R}$:ssä.

Teht. 6. *Olkoon funktio $\mathbf{z}(t) = (x(t), y(t))$ parin AAT:n*

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t + y)(x^2 + y^2 - 1) \\ (t - x)(x^2 + y^2 - 1) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}(0) = (1/2, 1/2),$$

(maksimaali)ratkaisu. Osoita systeemien Poistumislauseen (= lauseen 4.7 analogia) avulla, että funktio $\mathbf{z}$ on hengissä koko $\mathbb{R}$:ssä.

Ohje. *Triviaaliratkaisut. Kuva txy-koordinaatistossa voi auttaa. Oikeastaan topologiasta tarvitaan avuksi Reunanylityslause.*

Ratk. Systeemin määrittelevä ei-autonominen epälineaarinen funktio $\mathbf{f} = (f_1, f_2) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $\mathbf{f}(t, x, y) = ((t+y)(x^2+y^2-1), (t-x)(x^2+y^2-1))$, on jatkuva ja sen komponenttifunktioilla on jatkuvat osittaisderivaatat $\partial f_i/\partial x$ ja $\partial f_i/\partial y$, kun $i = 1, 2$. Systeemi siis toteuttaa OY-lauseen ja poistumislauseen oletukset koko avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Täten AAT:llä todellakin on yksikäsitteinen maksimaalinen ratkaisu $\mathbf{z}$, jonka määrittelyväli I on tällöin avoin eli $I =]a, b[$ joillakin $-\infty \le a < b \le \infty$ ja jolle pätee, että

$$\|(t, \mathbf{z}(t))\| = \sqrt{t^2 + x(t)^2 + y(t)^2} \to \infty, \quad \text{kun } t \to a+ \text{ tai } t \to b-.$$

Osoitetaan, että $\mathbf{z}$ on rajoitettu, jolloin välttämättä $a = -\infty$ ja $b = \infty$ eli siis $I = \mathbb{R}$.

Määritetään ohjetta noudattaen parin triviaali- eli vakiofunktioratkaisut. Kun $\mathbf{u} = (p, q) \in \mathbb{R}^2$, niin vakiofunktio $\mathbf{z_u} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \mathbf{u}$, on systeemin ratkaisu jos ja vain jos

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \mathbf{0}\ \forall t \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} (t+q)(p^2+q^2-1) = 0 \\ (t-p)(p^2+q^2-1) = 0 \end{cases} \forall t \in \mathbb{R} \iff p^2 + q^2 - 1 = 0 \iff \mathbf{u} \in S^1.$$

Tässä $S^1 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{u}\| = 1\}$ on tason yksikköympyrä. Huomataan, että $\|\mathbf{z}(0)\| = \|(1/2, 1/2)\| = \sqrt{2}/2 < 1$. Täten uudelleen OY-lausetta soveltaen nähdään, että kullakin $\mathbf{u} \in S^1$ on $\mathbf{z}(t) \neq \mathbf{z_u}(t)\ \forall t \in I$. Siis $\mathbf{z}(t) \notin S^1\ \forall t \in I$. Ympyrän S^1 komplementti tasossa $\mathbb{R}^2$ on topologian mielessä epäyhtenäinen (Topologia I). Jatkuvan käyrän $\mathbf{z} \colon I \to \mathbb{R}^2$ kuvajoukko $\mathbf{z}I \subset \mathbb{R}^2 \setminus S^1$ taas on yhtenäinen, joten tällöin zI ei voi leikata sekä ympyrän S^1 sisäpuolista osaa $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{u}\| < 1\}$ että sen ulkopuolista osaa $\{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \mid \|\mathbf{u}\| > 1\}$ tasosta (toisella tavalla muotoiltuna, jos se leikkaisi molempia, niin reunanylityslauseen perusteella se leikkaisi myös ympyrää S^1, mikä olisi ristiriita). Täten $\|\mathbf{z}(t)\| < 1\ \forall t \in I$. Siis $\mathbf{z}$ on rajoitettu funktio. Näin ollen $I = \mathbb{R}$, kuten nähtiin.

Huom. Tehtävää voi ajatella myös kolmiulotteisesti. Olkoon $L = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. Ympyrälieriökappaleen L reuna on lieriöpinta $\partial L = \{(t, x, y) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, joka siis on yhdiste systeemin triviaaliratkaisujen kuvaajasuorista $\Gamma_{\mathbf{u}} = \{(t, \mathbf{z_u}(t)) \mid t \in \mathbb{R}\}$ ($\mathbf{u} \in S^1$). Tutkittavan AAT:n ratkaisun $\mathbf{z}$ kuvaajajoukolle $\Gamma = \{(t, \mathbf{z}(t)) \mid t \in I\}$ pätee OY-lauseen tähden, että $\Gamma \cap \Gamma_{\mathbf{u}} = \emptyset\ \forall \mathbf{u} \in S^1$. Siis $\Gamma \cap \partial L = \emptyset$. Toisaalta $\mathbb{R}^3 \setminus \partial L$ on epäyhtenäinen, kun taas Γ jatkuvan käyrän $I \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (t, \mathbf{z}(t))$, kuvajoukkona on yhtenäinen. Koska piste $(0, \mathbf{z}(0))$ on ∂L:n sisäpuolella eli kuuluu avoimeen ympyrälieriöön $L \setminus \partial L$, niin täten Γ on kokonaisuudessaan ∂L:n sisäpuolella: $\Gamma \subset L \setminus \partial L$ (jos nimittäin Γ leikkaisi ∂L:n ulkopuolta $\mathbb{R}^3 \setminus L$, niin Γ leikkaisi pintaa ∂L ["reunanylityslause"], mikä nähtiin yllä mahdottomaksi). Tällöin poistumislauseen vaatimus, että $\|(t, \mathbf{z}(t))\| \to \infty$, kun t lähestyy I:n päätepistettä, on selvästikin mahdollinen vain, kun $I = \mathbb{R}$.