Diff.yht. II, harj. 2, 12.–14.11.2013, ratk. (Jouni Luukkainen), 4 sivua

Teht. 1. *Palauta seuraavat skalaariyhtälöt* 1. *kl. systeemeiksi:*
(a) $y'' + y'' \sin x + y' = y \cos x$, **(b)** $y^{(3)} + x^3 \cos(y') = \sin x$.
Mitkä näistä ovat lineaarisia?

Ratk. (a) Yhtälö on lineaarinen, ja sen normaalimuoto on $y'' = \dfrac{\cos x}{1+\sin x} y - \dfrac{1}{1+\sin x} y'$ väleillä $I_n =]-\pi/2 + 2n\pi, 3\pi/2 + 2n\pi[$ $(n \in \mathbb{Z})$. (Tehtävässä *ei* siis ollut painovirhettä, että ensimmäisen termin olisi pitänyt olla y'''.)
Olkoon y annetun toisen kertaluvun yhtälön ratkaisu välillä I_n jollain $n \in \mathbb{Z}$. Merkitään $z_1 = y$ ja $z_2 = y'$. Ne toteuttavat lineaarisen systeemin

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = \dfrac{\cos x}{1+\sin x} z_1 - \dfrac{1}{1+\sin x} z_2 \end{cases} \iff \mathbf{z}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{\cos x}{1+\sin x} & -\dfrac{1}{1+\sin x} \end{bmatrix} \mathbf{z},$$

jossa $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$. Kääntäen, jos $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$ on tämän systeemin ratkaisu välillä I_n, niin $y = z_1$ on alkuperäisen yhtälön ratkaisu välillä I_n, sillä $y' = z_1' = z_2$ ja siis $(1+\sin x)y'' = (1+\sin x)z_2' = z_1 \cos x - z_2 = y \cos x - y'$. Saatu systeemi on täten yhtäpitävä alkuperäisen yhtälön kanssa väleillä I_n.
(b) Yhtälö ei ole lineaarinen. Sen normaalimuoto on $y^{(3)} = -x^3 \cos(y') + \sin x$. Sijoittamalla $z_1 = y$, $z_2 = y'$ ja $z_3 = y''$ saadaan

$$\begin{cases} z_1' = z_2 \\ z_2' = z_3 \\ z_3' = -x^3 \cos(z_2) + \sin x. \end{cases}$$

Käänteinen sijoitus on $y = z_1$.

Teht. 2. *Palauta seuraava* 2. *kl. systeemi normaalimuotoiseksi* 1. *kl. systeemiksi:*

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1(t) + 2kx_1(t) - kx_2(t) = 0 \\ m\ddot{x}_2(t) - kx_1(t) + 2kx_2(t) = 0. \end{cases}$$

Ratk. Systeemi on lineaarinen, ja siinä m ja k ovat positiivisia vakioita. Systeemin normaalimuoto on

$$\begin{cases} \ddot{x}_1(t) = -\dfrac{2k}{m} x_1(t) + \dfrac{k}{m} x_2(t) \\ \ddot{x}_2(t) = \dfrac{k}{m} x_1(t) - \dfrac{2k}{m} x_2(t). \end{cases}$$

Sijoitus $z_1 = x_1$, $z_2 = x_2$, $z_3 = \dot{x}_1$ ja $z_4 = \dot{x}_2$ antaa vaaditun systeemin

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_3(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_4(t) \\ \dot{z}_3(t) = -\dfrac{2k}{m} z_1(t) + \dfrac{k}{m} z_2(t) \\ \dot{z}_4(t) = \dfrac{k}{m} z_1(t) - \dfrac{2k}{m} z_2(t). \end{cases}$$

Käänteissijoitus on $x_1 = z_1$ ja $x_2 = z_2$.
Huom. Laskemalla alkuperäiset yhtälöt yhteen ja vähentämällä ensimmäisestä toinen saadaan sijoituksella $y_1 = x_1 + x_2$ ja $y_2 = x_1 - x_2$ systeemi

$$\begin{cases} \ddot{y}_1(t) = -\dfrac{k}{m} y_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) = -\dfrac{3k}{m} y_2(t), \end{cases}$$

joka on alkuperäistä yksinkertaisempi mutta kuitenkin sen kanssa yhtäpitävä käänteissijoituksena $x_1 = (y_1 + y_2)/2$ ja $x_2 = (y_1 - y_2)/2$. Sijoituksella $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$, $z_3 = \dot{y}_1$ ja $z_4 = \dot{y}_2$ myös seuraava systeemi täyttää tällöin vaatimukset:

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = z_3(t) \\ \dot{z}_2(t) = z_4(t) \\ \dot{z}_3(t) = -\dfrac{k}{m} z_1(t) \\ \dot{z}_4(t) = -\dfrac{3k}{m} z_2(t). \end{cases}$$

Teht. 3. (a) *Palauta seuraava systeemi normaalimuotoiseksi* 1. *kl. systeemiksi:*

$$\begin{cases} \ddot{x} = f(t, x, y, \dot{x}) \\ \dot{y} = g(t, x, y). \end{cases}$$

(b) *Entä, jos ensimmäinen yhtälö kuuluukin*

$$\ddot{x} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})?$$

Ratk. (a) Olkoon (x, y) tämän systeemin ratkaisu jollain välillä I. Merkitään $z_1 = x$, $z_2 = y$ ja $z_3 = \dot{x}$. Tällöin (z_1, z_2, z_3) on seuraavan normaalimuotoisen 1. kl. systeemin ratkaisu välillä I:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 \\ \dot{z}_2 = g(t, z_1, z_2) \\ \dot{z}_3 = f(t, z_1, z_2, z_3). \end{cases}$$

Kääntäen, jos (z_1, z_2, z_3) on tämän normaalimuotoisen 1. kl. systeemin ratkaisu jollain välillä I, niin $(x, y) = (z_1, z_2)$ on alkuperäisen systeemin ratkaisu välillä I. Siis systeemit ovat yhtäpitävät.

(b) Toisen yhtälön $\dot{y} = g(t, x, y)$ nojalla ensimmäinen yhtälö $\ddot{x} = f(t, x, y, \dot{x}, \dot{y})$ voidaan kirjoittaa muotoon $\ddot{x} = f(t, x, y, \dot{x}, g(t, x, y))$. Täten alkuperäisen systeemin kanssa yhtäpitävä normaalimuotoinen 1. kl. systeemi on nyt seuraava:

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_3 \\ \dot{z}_2 = g(t, z_1, z_2) \\ \dot{z}_3 = f(t, z_1, z_2, z_3, g(t, z_1, z_2)). \end{cases}$$

Teht. 4. *Osoita, että yhdelläkään pisteellä* $(x, -1)$*, missä* $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, ei ole ympäristöä (ei kyllä myöskään, kun* $x = 0$*), jossa funktio*

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x(x-1)(y+1)}$$

on tasaisesti Lip-jatkuva muuttujan y *suhteen (vrt. harjoituksen 1 tehtävä 6).*

Ratk. Oikeasti olisi pitänyt aluksi olettaa, että $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$, ja sitten huomata, että väite pätee myös, kun $x = 0$ tai $x = 1$. Olkoon siis $x \in \mathbb{R}$ mielivaltainen. Olkoon myös $r > 0$. Riittää osoittaa, että f ei ole tasaisesti Lip-jatkuva muuttujan y suhteen pisteen $(x, -1)$ neliöympäristössä $K = [x - r, x + r] \times [-1 - r, -1 + r]$. Valitaan piste $a \in [x - r, x + r] \setminus \{0, 1\}$. Olkoon $0 < h < r$; tällöin

$$\frac{|f(a, -1 + h) - f(a, -1)|}{|(-1 + h) - (-1)|} = \frac{|\sqrt[3]{a(a-1)h}|}{h} = \frac{\sqrt[3]{|a||a-1|}}{\sqrt[3]{h^2}} \to \infty, \qquad \text{kun } h \to 0.$$

Siis f ei ole Lip-jatkuva edes janalla $\{a\} \times [-1, -1 + r] \subset K$.

Teht. 5. *Esitä seuraava* 2×2*-homogeenisysteemi perinteellisesti auki kirjoitettuna ja ratkaise se:*

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} 2t & 3t^2 \\ 0 & 2t \end{bmatrix} \mathbf{z}(t). \tag{1}$$

Ratk. Merkitään $\mathbf{z} = (z_1, z_2)$. Silloin

$$(1) \iff \begin{cases} \dot z_1(t) = 2tz_1(t) + 3t^2 z_2(t) \\ \dot z_2(t) = 2tz_2(t) \end{cases} \iff \begin{cases} (2) \quad \dot z_2(t) - 2tz_2(t) = 0 \\ (3) \quad \dot z_1(t) - 2tz_1(t) = 3t^2 z_2(t). \end{cases}$$

Näistä (2) on homogeeniyhtälö z_2:lle. Kun z_2 on siitä ratkaistu ja sijoitettu (3):een, tästä puolestaan tulee sellainen epähomogeeninen yhtälö z_1:lle, jota vastaava homogeeniyhtälö on sama kuin z_2:lle. Ratkaistaan yhtälöt siksi yhteistä integroivaa tekijää $\mu(t) = e^{\int (-2t)\,dt} = e^{-t^2}$ käyttäen. Ensiksikin

$$(2) \iff \frac{d}{dt}(e^{-t^2} z_2(t)) = 0 \iff e^{-t^2} z_2(t) = C_2 \iff z_2(t) = C_2 e^{t^2}.$$

Nyt

$$(3) \iff \dot z_1(t) - 2tz_1(t) = 3C_2 t^2 e^{t^2} \iff \frac{d}{dt}(e^{-t^2} z_1(t)) = 3C_2 t^2 \iff e^{-t^2} z_1(t) = C_1 + C_2 t^3$$
$$\iff z_1(t) = C_1 e^{t^2} + C_2 t^3 e^{t^2}.$$

Täten (1):n yleinen ratkaisu on

$$\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{t^2} + C_2 t^3 e^{t^2} \\ C_2 e^{t^2} \end{bmatrix} = C_1 e^{t^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^{t^2} \begin{bmatrix} t^3 \\ 1 \end{bmatrix} = C_1 \mathbf{z}_1(t) + C_2 \mathbf{z}_2(t) \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (C_1, C_2 \in \mathbb{R}),$$

jossa $\mathbf{z}_1(t) = e^{t^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ja $\mathbf{z}_2(t) = e^{t^2} \begin{bmatrix} t^3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\forall t \in \mathbb{R}$. Siis $(\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2)$ on (1):n perusjärjestelmä $\mathbb{R}$:ssä. (Teoria toimii, sillä (1):n kerroinmatriisi on jatkuva.)

Teht. 6. *Harjoituksen 1 tehtävän 1 yleisessä ratkaisussa on neljä parametria. Osoita sitovasti, että tuo ratkaisu antaa kyseisen differentiaaliyhtälön kaikki ratkaisut.*

Ohje. *Lause 5.4 tai, jos haluat palauttaa systeemiksi, lause 5.3 (tai 5.5).*

Ratk. Tutkittavalle 4. kl. lineaariselle homogeeniselle vakiokertoimiselle yhtälölle $4y^{(4)} - 16y'' - 9y = 0$ löydettiin ratkaisut

$$y_1(x) = e^{3x/\sqrt{2}}, \quad y_2(x) = e^{-3x/\sqrt{2}}, \quad y_3(x) = \cos\frac{x}{\sqrt{2}}, \quad y_4(x) = \sin\frac{x}{\sqrt{2}} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

ja näiden avulla ratkaisuparvi $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4$ $(C_1, C_2, C_3, C_4 \in \mathbb{R})$. Olkoon $z\colon I \to \mathbb{R}$ mielivaltainen ratkaisu. Valitaan $x_0 \in I$. Osoitetaan, että kertoimet C_1, C_2, C_3, C_4 voidaan valita niin, että

$$y(x_0) = z(x_0), \quad y'(x_0) = z'(x_0), \quad y''(x_0) = z''(x_0), \quad y'''(x_0) = z'''(x_0).$$

Tällöin lauseesta 5.4 seuraa, että $z(x) = y(x)$ kaikilla $x \in I$.
Tätä varten kullakin $x \in \mathbb{R}$ kirjoitetaan

$$\begin{bmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ y''(x) \\ y'''(x) \end{bmatrix} = Y(x) \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix}$$

matriisin

$$Y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) & y_2(x) & y_3(x) & y_4(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & y_3'(x) & y_4'(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) & y_3''(x) & y_4''(x) \\ y_1'''(x) & y_2'''(x) & y_3'''(x) & y_4'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x/\sqrt{2}} & e^{-3x/\sqrt{2}} & \cos\frac{x}{\sqrt{2}} & \sin\frac{x}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}} e^{3x/\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}} e^{-3x/\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \sin\frac{x}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\frac{x}{\sqrt{2}} \\ \frac{9}{2} e^{3x/\sqrt{2}} & \frac{9}{2} e^{-3x/\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \cos\frac{x}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} \sin\frac{x}{\sqrt{2}} \\ \frac{27}{2\sqrt{2}} e^{3x/\sqrt{2}} & -\frac{27}{2\sqrt{2}} e^{-3x/\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin\frac{x}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\frac{x}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

avulla. Osoitetaan, että matriisi $Y(x_0)$ on kääntyvä, jolloin yhtälöllä

$$Y(x_0)\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(x_0) \\ z'(x_0) \\ z''(x_0) \\ z'''(x_0) \end{bmatrix}$$

on tasan yksi ratkaisu $(C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4$, joka siis on vaadittu.
Muodostetaan tätä varten kullakin $x \in \mathbb{R}$ (Wronskin) matriisin $Y(x)$ (Wronskin) determinantti

$$W(x) = \det Y(x) = \begin{vmatrix} e^{3x/\sqrt{2}} & e^{-3x/\sqrt{2}} & \cos\frac{x}{\sqrt{2}} & \sin\frac{x}{\sqrt{2}} \\ \frac{3}{\sqrt{2}}e^{3x/\sqrt{2}} & -\frac{3}{\sqrt{2}}e^{-3x/\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}} \\ \frac{9}{2}e^{3x/\sqrt{2}} & \frac{9}{2}e^{-3x/\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\cos\frac{x}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} \\ \frac{27}{2\sqrt{2}}e^{3x/\sqrt{2}} & -\frac{27}{2\sqrt{2}}e^{-3x/\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{x}{\sqrt{2}} \end{vmatrix},$$

ja osoitetaan, että $W(x) \neq 0$.
Havaitaan, että determinantin 1. ja 2. sarakkeesta voidaan eksponenttitekijät ottaa determinantin eteen tuloksi $e^{3x/\sqrt{2}}e^{-3x/\sqrt{2}} = 1$ ja tämän jälkeen 2., 3. ja 4. rivistä tekijät $1/\sqrt{2}$, $-1/2$ ja $-1/2\sqrt{2}$ determinantin eteen tuloksi $1/8$. Merkitään vielä $c = \cos(x/\sqrt{2})$ ja $s = \sin(x/\sqrt{2})$. Tällöin siis

$$W(x) = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 1 & 1 & c & s \\ 3 & -3 & -s & c \\ -9 & -9 & c & s \\ -27 & 27 & -s & c \end{vmatrix}.$$

Nyt vähentämällä ensimmäisestä rivistä kolmas rivi ja toisesta rivistä neljäs rivi saadaan

$$W(x) = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 10 & 10 & 0 & 0 \\ 30 & -30 & 0 & 0 \\ -9 & -9 & c & s \\ -27 & 27 & -s & c \end{vmatrix}.$$

Lisäämällä ensimmäinen rivi luvulla $9/10$ kerrottuna kolmanteen riviin ja toinen rivi luvulla $27/30$ kerrottuna neljänteen riviin ja tämän jälkeen lisäämällä ensimmäinen rivi luvulla -3 kerrottuna toiseen riviin determinantille saadaan muoto, joka vielä sievennetään lopulliseen muotoon lisäämällä toinen rivi luvulla $1/6$ kerrottuna ensimmäiseen riviin:

$$W(x) = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 10 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\begin{vmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{vmatrix}.$$

Lasketaan sitten determinantin arvo kehittämällä determinantti ensimmäisen rivin suhteen ja tämän jälkeen kehittämällä saatu determinatti jälleen ensimmäisen rivin suhteen:

$$W(x) = \frac{1}{8}\cdot 10\begin{vmatrix} -60 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{vmatrix} = \frac{1}{8}\cdot 10(-60)\begin{vmatrix} c & s \\ -s & c \end{vmatrix} = -75(c^2+s^2) = -75\cdot 1 = -75 \neq 0.$$

Täten matriisi $Y(x)$ on kääntyvä kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

Huom. i) Tutkittavana on siis lineaarinen homogeeniyhtälö, joten olisi voinut olettaa, että $I = \mathbb{R}$ ja valita $x_0 = 0$, jolloin $W(0)$:ssa olisi ollut $c = 1$ ja $s = 0$.

ii) Nähtiin, että kuvaus $(C_1, C_2, C_3, C_4) \mapsto C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4$ on (lineaarinen) bijektio avaruudelta $\mathbb{R}^4$ tutkittavan homogeenisen lineaarisen differentiaaliyhtälön koko $\mathbb{R}$:ssä määriteltyjen ratkaisujen avaruudelle. Täten ratkaisuavaruus on neliulotteinen vektoriavaruus ja ratkaisujono (y_1, y_2, y_3, y_4) sen eräs kanta eli perusjärjestelmä.