Diff.yht. II, harj. 1, 5.–7.11.2013, ratk. (Jouni Luukkainen), 4 sivua

1. *Ratkaise mukauttamalla lineaarista 2. kl. teoriaa seuraava lineaarinen 4. kl. homogeeniyhtälö:*

$$4y^{(4)} - 16y'' - 9y = 0.$$

Ei tarvitse (pilkun)tarkkaan perustella, että saat yhtälön kaikki ratkaisut.

Ratk. Yhtälö on vakiokertoiminen. Yrite $y(x) = e^{rx}$ ($r \in \mathbb{C}$) johtaa karakteristiseen yhtälöön $4r^4 - 16r^2 - 9 = (2r^2 - 9)(2r^2 + 1) = 4(r^2 - 9/2)(r^2 + 1/2) = 0 \iff r = \pm 3/\sqrt{2}$ tai $r = \pm i/\sqrt{2}$. Saadaan reaaliarvoiset ratkaisut $y_1(x) = e^{3x/\sqrt{2}}$ ja $y_2(x) = e^{-3x/\sqrt{2}}$. Eulerin kaavasta $e^{ix/\sqrt{2}} = \cos x/\sqrt{2} + i \sin x/\sqrt{2}$ tai kaavoista $\cos x/\sqrt{2} = (e^{ix/\sqrt{2}} + e^{-ix/\sqrt{2}})/2$ ja $\sin x/\sqrt{2} = (e^{ix/\sqrt{2}} - e^{-ix/\sqrt{2}})/2i$ saadaan kaksi muuta reaaliarvoista ratkaisua $y_3(x) = \cos x/\sqrt{2}$ ja $y_4(x) = \sin x/\sqrt{2}$. Tällöin

$$y(x) = C_1 e^{3x/\sqrt{2}} + C_2 e^{-3x/\sqrt{2}} + C_3 \cos \frac{x}{\sqrt{2}} + C_4 \sin \frac{x}{\sqrt{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

on kullakin vakiojonolla $(C_1, C_2, C_3, C_4) \in \mathbb{R}^4$ yhtälön ratkaisu. Ratkaisujono (y_1, y_2, y_3, y_4) olisi ilmeisestikin vapaa. Teorian nojalla ratkaisuavaruus olisi 4-ulotteinen ja jono (y_1, y_2, y_3, y_4) tällöin myöskin virittävä eli siis perusjärjestelmä. Silloin olisi saatu kaikki ratkaisut, mikä osoitetaan harjoitustehtävässä 2.1.

2. *Olkoot $y_1\colon I \to \mathbb{R}$ ja $y_2\colon I \to \mathbb{R}$ derivoituvia funktioita välillä I, ja pätekööt $W(y_1, y_2)(x) = 0$ ja $y_1(x) \neq 0 \neq y_2(x)$ kaikilla $x \in I$. Osoita, että tällöin funktiot y_1 ja y_2 ovat lineaarisesti riippuvia, siis yhtälö $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) = 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ toteutuu joillakin vakioilla c_1, c_2, joista ainakin toinen on $\neq 0$.*

Ohje. Differentiaaliyhtälö (yksi).

Ratk. Lineaarisesti riippuvuus tarkoittaa nyt, että on olemassa $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, jolla $y_2 = cy_1$ eli jolla $y_1 = y_2/c$.

I tapa. Yhtälöstä $W(y_1, y_2)(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = 0$ saadaan jakamalla tulolla $y_1(x)y_2(x) \neq 0$ yhtälö, joka sitten ratkaistaan:

$$\frac{y_2'(x)}{y_2(x)} = \frac{y_1'(x)}{y_1(x)} \iff \ln|y_2(x)| = \ln|y_1(x)| + c_0 \quad (c_0 \in \mathbb{R}) \iff y_2(x) = cy_1(x) \quad (c = \pm e^{c_0} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

II tapa. Oletusten tähden $\left(\dfrac{y_2}{y_1}\right)' = \dfrac{y_2' y_1 - y_1' y_2}{y_1^2} = \dfrac{W(y_1, y_2)}{y_1^2} = 0$, joten $\dfrac{y_2}{y_1} = c$ jollain $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Huom. Lisäoletuksella, että $y_1, y_2 \in C^2(I)$, saadaan oletusyhtälö derivoimalla, että $0 = W'(y_1, y_2) = y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_1'' y_2 - y_1' y_2' = y_1 y_2'' - y_1'' y_2$, ja tästä taas y_1:llä jakamalla, että $y_2'' - (y_1''/y_1)y_2 = 0$. Triviaalisti pätee $y_1'' - (y_1''/y_1)y_1 = 0$. Merkitään $p = -y_1''/y_1$. Silloin $y = y_1$ ja $y = y_2$ ovat molemmat saman jatkuvakertoimisen lineaarisen homogeeniyhtälön $y'' + py = 0$ ratkaisuja. Tällaisten yhtälöiden teorian mukaan ehdosta $W(y_1, y_2) = 0$ taas seuraa, että pari (y_1, y_2) on sidottu eli lineaarisesti riippuva. Siis sikäli kyseessä oli tuttu asia.

3. *Määritä neljä ensimmäistä Picardin approksimaattia AAT:lle*

$$\textbf{(a)} \quad y' = y + 1, \quad y(0) = -1; \qquad \textbf{(b)} \quad y' = y + 1, \quad y(0) = 0.$$

Ratk. Olkoon $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio ja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Tällöin AAT:n $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$, Picardin approksimaatit saadaan rekursiivisesti kaavoista $y_0(x) = y_0$ $\forall x \in \mathbb{R}$ (jossa siis symbolilla y_0 on kaksoismerkitys) ja $y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_n(t))\, dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \geq 0$.

(a) Nyt

$$y_0(x) = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ja $y_{n+1}(x) = -1 + \int_0^x (y_n(t)+1)\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \geq 0$, joten

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -1 + \int_0^x (-1+1)\,dt = -1 + \int_0^x 0\,dt = -1+0 = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_2(x) &= -1 + \int_0^x (-1+1)\,dt = -1 + \int_0^x 0\,dt = -1+0 = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_3(x) &= -1 + \int_0^x (-1+1)\,dt = -1 + \int_0^x 0\,dt = -1+0 = -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

(b) Nyt

$$y_0(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

ja $y_{n+1}(x) = \int_0^x (y_n(t)+1)\,dt$ $\forall x \in \mathbb{R}$, kun $n \geq 0$, joten

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \int_0^x (0+1)\,dt = \Big/_{0}^{x}\, t = x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_2(x) &= \int_0^x (t+1)\,dt = \Big/_{0}^{x} (\tfrac{1}{2}t^2 + t) = \tfrac{1}{2}x^2 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \\ y_3(x) &= \int_0^x (\tfrac{1}{2}t^2 + t + 1)\,dt = \Big/_{0}^{x} (\tfrac{1}{6}t^3 + \tfrac{1}{2}t^2 + t) = \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 + x \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4. *Ratkaise edellisen tehtävän AAT:t eksaktisti ja vertaa Picardin approksimaatteihin. Miltä näyttää?*

Ratk. Ratkaistaan ensin lineaarinen yhtälö $y' = y+1 \iff y'-y = 1$ integroivalla tekijällä $\mu(x) = e^{\int (-1)\,dt} = e^{-x}$; saadaan $e^{-x}y = \int e^{-x}\,dx = -e^{-x} + C \iff y(x) = -1 + Ce^x$.

(a) Nyt $y(0) = -1 \iff -1 = -1 + C \iff C = 0 \iff y(x) = -1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Tämä selittää 3(a):n tuloksen, sillä yleisesti, jos y on välillä I AAT:n $y' = f(x,y)$, $y(x_0) = y_0$, tarkka ratkaisu, niin yhtäpitävä integraaliyhtälö $y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t))\,dt$ toteutuu eksaktisti välillä I.

(b) Nyt $y(0) = 0 \iff 0 = -1 + C \iff C = 1 \iff y(x) = e^x - 1$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Eksponenttifunktion (origokeskisen) Taylorin sarjan (Analyysi II) $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ $\forall x \in \mathbb{R}$ tähden tarkalle ratkaisulle saadaan Taylorin sarja

$$y(x) = e^x - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \dots \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Siis 3(b):n Picardin approksimaatit ovat tarkan ratkaisun Taylorin polymeja: $y_n(x) = T_n(y;0)(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k!}$, kun $0 \leq n \leq 3$.

5. *Onko funktio $f(x,y) = y^3 \sin x/(1+y^2)$ joukossa $I \times J$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen, kun*

(a) $I = [0,1]$ *ja* $J = [0,1]$,

(b) $I = \mathbb{R}$ *ja* $J = [0,1]$,

(c) $I = [0,1]$ *ja* $J = [0,\infty[$?

Perustelut. Jos on, niin anna (jokin) käypä Lip-*vakio.*

Ratk. Yhden muuttujan Lipschitz-funktiot. Palautetaan mieleen *väliarvolause* (Analyysi I): Jos $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ on sisäpisteissä derivoituva ja päätepisteissä jatkuva funktio, niin $\varphi(b) - \varphi(a) = \varphi'(\xi)(b-a)$ jollain $\xi \in\,]a,b[$. Täten, jos jollain $M \geq 0$ pätee $|\varphi'(x)| \leq M$, kun $a < x < b$, niin $|\varphi(b) - \varphi(a)| \leq M(b-a)$. Funktio φ välillä I on Lipschitz-jatkuva, jos jollain vakiolla $M \geq 0$ pätee $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M|x-y|$ kaikilla

$x, y \in I$; tällöin M on φ:n (eräs) Lip-vakio ja φ on M-Lipschitz. Näin siis on, jos φ on derivoituva ja $|\varphi'(x)| \leq M$ $\forall x \in I$. Kannattaa myös huomata, että kääntäen, jos φ on välillä I derivoituva ja M-Lipschitz funktio, niin

$$|\varphi'(x)| = \left| \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h} \right| = \lim_{h\to 0} \frac{|\varphi(x+h)-\varphi(x)|}{|h|} \leq M, \quad \text{kun } x \in I. \quad \blacksquare$$

Merkitään nyt $g(y) = y^3/(1+y^2)$, jolloin $f(x,y) = g(y)\sin x$. Kullakin $x \in \mathbb{R}$ tutkitaan funktiota $y \mapsto f(x,y)$ välillä $\mathbb{R}$; tällä on derivaatta $(\partial f/\partial y)(x,y) = g'(y)\sin x$, jolloin $|(\partial f/\partial y)(x,y)| = |g'(y)||\sin x|$. Tässä

$$g'(y) = \frac{3y^2(1+y^2)-2yy^3}{(1+y^2)^2} = \frac{3y^2+y^4}{(1+y^2)^2} \leq \frac{3y^2+3y^4}{(1+y^2)^2} = \frac{3y^2}{1+y^2} \leq 3$$

ja $g'(y) \geq 0$ kaikilla $y \in \mathbb{R}$. Siis $|(\partial f/\partial y)(x,y)| \leq 3|\sin x|$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Täten

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leq 3|\sin x| \leq 3|y_1 - y_2|, \quad \text{kun } x \in \mathbb{R} \text{ ja } y_1, y_2 \in \mathbb{R},$$

eli f on tasossa $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen Lip-vakiolla 3.

Arvioidaanpa $|g'(y)|$ huvin vuoksi tarkemmin. Merkitään $\alpha(t) = (3t+t^2)/(1+t)^2$, kun $t \geq 0$, jolloin $g'(y) = \alpha(y^2)$. Nyt

$$\alpha'(t) = \frac{(3+2t)(1+t)^2 - 2(1+t)(3t+t^2)}{(1+t)^4} = \frac{(3+2t)(1+t)-2(3t+t^2)}{(1+t)^3} = \frac{3-t}{(1+t)^3},$$

joten $\alpha'(t) > 0$, kun $t < 3$, ja $\alpha'(t) < 0$, kun $t > 3$. Täten g' on aidosti kasvava välillä $[0, \sqrt{3}]$ ja aidosti vähenevä välillä $[\sqrt{3}, \infty[$; lisäksi $g'(\sqrt{3}) = \alpha(3) = 18/16 = 9/8$. Koska $g'(y)$ on parillinen, niin $9/8$ on $|g'|$:n suurin arvo. Näin ollen f on tasossa $\mathbb{R}^2$ tasaisesti Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen Lip-vakiolla $9/8$, ja tämä Lip-vakio on pienin mahdollinen.

Tutkitaan kohdat (a)–(c) silti vielä erikseen.

(a) Tapauksessa $0 \leq y \leq 1$ helppo arvio on $|g'(y)| \leq (3\cdot 1^2 + 1^4)/(1+0^2)^2 = 4$, jolloin saataisiin, että f tasaisesti 4-Lipschitz muuttujan y suhteen joukossa $I \times J$. Paras Lip-vakio on $\sin 1$, sillä $1 < \sqrt{3}$ ja $g'(1) = 4/4 = 1$ sekä $0 < 1 < \pi/2$.

(b) Nyt $\max_{x\in I} |\sin x| = 1$. Siis paras Lip-vakio on 1.

(c) Nyt paras Lip-vakio on $(9/8)\sin 1$.

Huom. Tehtävä on mahdollista ratkaista suoraan, käyttämättä derivaattaa: jos $x \in \mathbb{R}$ ja $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, niin

$$\begin{aligned}
|f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= |\sin x| \left| \frac{y_1^3}{1+y_1^2} - \frac{y_2^3}{1+y_2^2} \right| = |\sin x| \frac{|(y_1^3 - y_2^3) + (y_1^3 y_2^2 - y_1^2 y_2^3)|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} \\
&= |\sin x||y_1 - y_2| \frac{|(y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2) + y_1^2 y_2^2|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} \leq |\sin x||y_1-y_2| \frac{|y_1||y_2| + (y_1^2 + y_2^2 + y_1^2 y_2^2)}{1 + y_1^2 + y_2^2 + y_1^2 y_2^2} \\
&\leq \frac{5}{4}|\sin x||y_1 - y_2| \leq \frac{5}{4}|y_1 - y_2|
\end{aligned}$$

kolmioepäyhtälön ja epäyhtälöistä $2ab \leq a^2 + b^2$ ja $2ab \leq 1 + a^2b^2$ seuraavan epäyhtälön $ab \leq (1 + a^2 + b^2 + a^2b^2)/4$ nojalla. Siis f on tasaisesti $(5/4)$-Lipschitz muuttujan y suhteen tasossa $\mathbb{R}^2$.

6. *Missä $\mathbb{R}^2$:n mahdollisimman suurissa alueissa DY*

$$y' = f(x,y) = \sqrt[3]{x(x-1)(y+1)}$$

toteuttaa lokaalin OY-lauseen 4.4 ehdot? Perustele lyhyesti ehtojen voimassaolo niissä, mutta ei sitä, että jossain ne eivät ole voimassa.

Huom. DY on määritelty koko xy-tasossa $\mathbb{R}^2$.

Ratk. Funktio f on määritelty ja jatkuva koko tasossa $\mathbb{R}^2$, ja $f(x,y) = \sqrt[3]{x(x-1)}\,\sqrt[3]{y+1}\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Siis

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sqrt[3]{x(x-1)}}{\sqrt[3]{(y+1)^2}}, \qquad \text{kun } y \neq -1.$$

Tällöin $\partial f/\partial y$ on jatkuva avoimissa puolitasoissa $D_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > -1\}$ ja $D_- = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < -1\}$. Siis, jos $D = D_\pm$, niin Lemman 4.2 nojalla jokaista pistettä $(x_0, y_0) \in D$ kohti on olemassa sellaiset $p, q > 0$ ja $M \geq 0$, että $K = [x_0 - p, x_0 + p] \times [y_0 - q, y_0 + q] \subset D$ ja että f on tasaisesti M-Lipschitz-jatkuva muuttujan y suhteen K:ssa. Tällöin f siis toteuttaa lokaalin Lipschitz-ehdon muuttujan y osalta alueessa D, jossa f on myös jatkuva. Täten f toteuttaa OY-lauseen 4.4 ehdot alueissa D_+ ja D_-. Harjoitustehtävässä 2.4 osoitetaan, että alueet D_+ ja D_- ovat tässä suhteessa suurimmat.