MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Ratkaisuehdotuksia alkuviikolle 41
Taneli Pusa

O1 Selvitä kurssin tietojen avulla

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n+1}.$$

Perustelu!

Ratkaisu Käytetään monisteen lausetta 1.2.8 (s.20) raja-arvon laskusäännöistä, tietoa $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ja tietoa että vakiojonon raja-arvo on kyseinen vakio. Muokataan ensin tutkittavaa lauseketta

$$\frac{3n+2}{2n+1} = \frac{n(3+\frac{2}{n})}{n(2+\frac{1}{n})} = \frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}.$$

Nyt voidaan halutun raja-arvon olemassaolo ja arvo päätellä valmiista tiedoista.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ ja } \lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(2 \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 2 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} 3 = 3 \text{ ja } \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} 3 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 3 + 0 = 3$$

Lausekkeen nimittäjälle saadaan samanlaisella päättelyllä

$$\lim_{n\to\infty} 2 + \frac{1}{n} = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{2}$$

eli kysytty raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3n+2}{2n+1} = \frac{3}{2}.$$

O2 Osoita määritelmän perusteella että

$$\frac{n^2+2}{n^2+1} \to 1 \text{ kun } n \to \infty.$$

Ratkaisu

Lukujonon raja-arvon määritelmä (moniste s.18) sanoo, että

$$\frac{n^2+2}{n^2+1} \to 1, \text{ kun } n \to \infty$$

$$\text{eli } \lim_{n\to\infty} \frac{n^2+2}{n^2+1} = 1$$

jos, ja vain jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen $K \in \mathbb{N}$, että

$$\left|\frac{n^2+2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon, \text{ kun } n > K.$$

Etsitään vaadittu K jokaiselle ε tutkimalla lukujonon jäsenten etäisyyttä 1:stä eli lauseketta

$$\left|\frac{n^2+2}{n^2+1} - 1\right|.$$

Oleellisesti haluamme löytää itseisarvolausekkeelle jonkin yksinkertaisen ylärajan, jonka avulla K on helppo määrätä.

$$\left|\frac{n^2+2}{n^2+1} - 1\right| = \left|\frac{n^2+2-n^2-1}{n^2+1}\right| = \left|\frac{1}{n^2+1}\right| = \frac{1}{n^2+1}.$$

Arvioidaan ylöspäin:

$$\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n}.$$

Nyt on saatu

$$\left|\frac{n^2+2}{n^2+1} - 1\right| \leq \frac{1}{n},$$

joten

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n^2+2}{n^2+1} - 1\right| < \varepsilon$$

ja voimme laskea halutun K:n:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Nyt siis edellä mainitun perusteella kaikilla $\varepsilon > 0$ pätee, että kun $K \geq \frac{1}{\epsilon}$ ja $n > K$, niin

$$\left| \frac{n^2+2}{n^2+1} - 1 \right| < \epsilon,$$

ja siten

$$\frac{n^2+2}{n^2+1} \to 1, \text{ kun } n \to \infty.$$

K1 (a)Osoita että $5^n \geq 1 + 4n$ kun $n = 1, 2, 3, \ldots$.
(b) Osoita että

$$\frac{1}{5^n} \to 0 \text{ kun } n \to \infty.$$

Ratkaisu
(a)
Tapa 1
Käytetään Bernoullin epäyhtälöä:

$$(1+x)^r \geq 1 + rx,$$

missä $x > -1$ on reaaliluku ja $r \geq 0$ on kokonaisluku. Olkoon nyt $x = 4 > -1$ ja $r = n = 1, 2, 3 \ldots \geq 0$, jolloin saadaan

$$(1+4)^n = 5^n \geq 1 + 4n,$$

mikä haluttiin todistaa.

Tapa 2
Osoitetaan väite induktiolla.
Tarkistetaan ensin tapaus $n = 1$

$$5^1 = 5 \geq 1 + 4 \cdot 1 = 5,$$

joka on tosi. Tehdään sitten (induktio-)oletus että väite pätee tapauksessa $n = k$ jollekin $k = (1, 2, 3, \ldots)$ eli

$$5^k \geq 1 + 4k$$

ja tutkitaan tapausta $n = k + 1$

$$5^{k+1} = 5 \cdot 5^k \geq 5^k + 4,$$

missä epäyhtälö seuraa helposti kun huomataan että $5^k \geq 1$. Nyt induktio-oletuksesta seuraa että

$$5^k + 4 \geq 1 + 4k + 4 = 1 + 4(k+1)$$

eli

$$5^{k+1} \geq 1 + 4(k+1)$$

mikä haluttiin osoittaa.

(b)
Tässä voitaisiin käyttää monisteen lausetta 1.4.2 (s.25), jonka mukaan vähenevä alhaalta rajoitettu lukujono suppenee ja sen raja-arvo on $\inf\{x_n\}$. Tehdään todistus kuitenkin nojautuen raja-arvon määritelmään.
Tutkitaan lauseketta (ks. **O2** tarkempi selitys määritelmän käytöstä)

$$\left|\frac{1}{5^n} - 0\right| = \frac{1}{5^n}.$$

(a)-kohdan perusteella

$$\frac{1}{5^n} \leq \frac{1}{1+4n}, \text{ kun } n \in \mathbb{N}$$

ja

$$\frac{1}{1+4n} \leq \frac{1}{4n} \leq \frac{1}{n}.$$

Nyt jos $\varepsilon > 0$ on mielivaltainen reaaliluku, voidaan valita $K \geq \frac{1}{\varepsilon}$, jolloin

$$\left|\frac{1}{5^n} - 0\right| < \varepsilon, \text{ kun } n > K \geq \frac{1}{\varepsilon}.$$

K2 Osoita, että

$$\frac{n^2+1}{n+1} \to \infty \text{ kun } n \to \infty.$$

Ratkaisu
Määritelmän mukaan lukujono (x_n) kasvaa rajatta eli $x_n \to \infty$, kun $n \to \infty$, jos jokaiselle reaaliluvulle M löytyy sellainen $K \in \mathbb{N}$, että

$$x_n > M, \text{ kun } n > K$$

eli toisin sanoen ei ole olemassa sellaista reaalilukua M, jota suuremmaksi lukujonon jäseniä ei saataisi kun n valitaan tarpeeksi suureksi.
Tutkitaan tehtävän lukujonoa ja etsitään sille alaraja, jonka avulla tarvittava kynnys K voidaan määrittää helposti jokaisella M:lle.

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+1} \geq \frac{n^2}{n+n} = \frac{n^2}{2n} = \frac{n}{2}$$

ja

$$\frac{n}{2} > M \Leftrightarrow n > 2M,$$

joten jos M on mielivaltainen reaaliluku, valitsemalla $K \geq 2M$ pätee, että

$$\frac{n^2+1}{n+1} \geq \frac{n}{2} > M, \text{ kun } n > K$$

ja siten

$$\frac{n^2+1}{n+1} \to \infty, \text{ kun } n \to \infty.$$

K3 Osoita, että

$$\frac{1+n^2}{1-2n} \to -\infty \ \text{ kun } n \to \infty.$$

Ratkaisu

Pitää osoittaa, että kaikille $m \in \mathbb{R}$ löytyy $K \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\frac{1+n^2}{1-2n} < m, \text{ kun } n > K.$$

Tutkitaan taas lukujonon lauseketta ja yritetään löytää sille yläraja, joka saataisiin helposti pienemmäksi kuin m. Huomataan ensin, että

$$\frac{1+n^2}{1-2n} < 0 \ \forall n \geq 1,$$

jolloin on kätevää tarkastella lauseketta muodossa

$$\frac{1+n^2}{1-2n} = -\frac{1+n^2}{2n-1}.$$

Nyt voimme arvioida koko lauseketta ylöspäin arvioimalla positiivista osaa alaspäin:

$$-\frac{1+n^2}{2n-1} \leq -\frac{n^2}{2n-1} \leq -\frac{n^2}{2n} = -\frac{n}{2}.$$

Tästä saamme kätevästi kynnyksen K:

$$-\frac{n}{2} < m \Leftrightarrow n > -2m.$$

Eli näin ollen kaikille reaaliluvuille m pätee, että

$$\frac{1+n^2}{1-2n} \leq -n < m, \text{ kun } n > K \geq -2m.$$