MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Tehtävät viikolle 38
Loppuviikon tehtävien ratkaisuehdotuksia, Miika Paavola

HUOM! Näissä tehtävissä viitataan kolmioepäyhtälöön ($|x+y| \leq |x|+|y|$) merkinnällä $\triangle - ey$. Vastaavasti itseisarvolemmalle ($|x| < y \Leftrightarrow -y < x < y$) käytetään merkintää IAL.

O3 Oletetaan, että $|x-e| < 9^{-9}$ ja $|y-\pi| < 9^{-9}$. (a) Mitä tiedät itseisarvosta $|(x+y)-(e+\pi)|$?

Ratkaisu. Kirjoittamalla annettu itseisarvo hieman eri muotoon, käyttämällä kolmioepäyhtälöä (merkitään näissä ratkaisuissa $\triangle - ey$) ja lopulta käyttämällä tehtävän oletuksia saadaan:

$$|(x+y)-(e+\pi)| = |(x-e)+(y-\pi)| \overset{\triangle - ey}{\leq} |(x-e)|+|(y-\pi)| < 9^{-9}+9^{-9} = 2\cdot 9^{-9}$$

(b) Mitä tiedät itseisarvosta $|xy-e\pi|$? Tässä kannattaa erotukseen lisätä ja vähentää $x\pi$.

Lähdetään liikkeelle käyttämällä tehtävänannossa annettua vinkkiä, jolloin saadaan:

$$|xy-e\pi| = |xy-x\pi+x\pi-e\pi| = |x(y-\pi)+\pi(x-e)|.$$

Saimme siis ottamalla itseisarvon sisällä yhteisiä tekijöitä taas esille erotukset $(y-\pi)$ ja $(x-e)$, joiden itsearvoista meillä on tehtävänannon perusteella tietoa. Jatkamme jälleen kolmioepäyhtälön avulla, jonka jälkeen käytämme tehtävässä $K4$ todistettavaa tulosta: $|xy| = |x||y|$. Näin pääsemme käsiksi ym. itseisarvoihin:

$$\begin{aligned} |xy-e\pi| &= |x(y-\pi)+\pi(x-e)| \\ &\leq |x(y-\pi)|+|\pi(x-e)| \\ &\leq |x|\,|y-\pi|+|\pi|\,|x-e| \\ &< |x|\cdot 9^{-9}+\pi\cdot 9^{-9} \end{aligned}$$

Nyt arvio tutkittavasta itseisarvosta on jo huomattavasti mukavamman näköinen. Arviossa esiintyvästä $|x|$:stä kuitenkin pitäisi päästä jotenkin eroon. Itseisarvoepäyhtälön avulla saadaan:

$$|x-e| < 9^{-9} \overset{IAL}{\Leftrightarrow} -9^{-9} < x-e < 9^{-9} \Leftrightarrow e-9^{-9} < x < e+9^{-9}.$$

Koska $x > e-9^{-9} > -e-9^{-9}$, saadaan lopulta käyttämällä itseisarvolemmaa uudestaan:

$$-e-9^{-9} < x < e+9^{-9} \overset{IAL}{\Leftrightarrow} |x| < e+9^{-9} < \frac{11}{4}+\frac{1}{4} = 3.$$

Saimme siis johdettua arvion $|x| < e+9^{-9}$. Käyttämällä tätä alkuperäiseen ongelmaan saamme:

$$|xy - e\pi| < |x| \cdot 9^{-9} + \pi \cdot 9^{-9} \leq (e + 9^{-9}) \cdot 9^{-9} + \pi \cdot 9^{-9} = (e + 9^{-9} + \pi) \cdot 9^{-9}$$

Nyt olemme saaneet seuraavan arvion:

$$|xy - e\pi| \leq (e + 9^{-9} + \pi) \cdot 9^{-9}$$

On hieman makuasia/riippuu tilanteesta, kuinka tarkan arvion tarvitsemme ja minkälaisessa muodossa sen haluamme antaa (Nyt saatu arvio on hieman sotkuinen ja siitä on ehkä hankala nopealla vilkaisulla sanoa mitään). Saatua arviota voisi vielä tilanteen sen salliessa sieventää hieman tarkkuuden kärsiessä: $(e + 9^{-9} + \pi) \cdot 9^{-9} < (3 + 1 + 4) \cdot 9^{-9} \leq 9 \cdot 9^{-9} = 9^{-8}$ (sillä $e \approx 2,71$, $9^{-9} \approx 0,26 * 10^{-9}$ ja $\pi \approx 3,14$). Näin saamme helpommin luettavan (ja siis hieman epätarkemman) arvion:

$$|xy - e\pi| \leq 9^{-8}.$$

O4 Oletetaan, että $|x - e| < 9^{-9}$ ja $|y - \pi| < 9^{-9}$. Mitä tiedät itseisarvosta

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{e}{\pi}\right| ?$$

Ratkaisu. Edellisestä tehtävästä viisastuneena voisi arvata, että taas auttaa jonkin termin lisääminen ja vähentäminen itseisarvon sisällä niin, että saamme esiin erotukset $(x - e)$ ja $(y - \pi)$. Kokeillaan termiä $\frac{e}{y}$, jolloin saamme otettua myös yhteisiä tekijöitä:

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{e}{\pi}\right| = \left|\frac{x}{y} - \frac{e}{y} + \frac{e}{y} - \frac{e}{\pi}\right| = \left|\frac{1}{y}(x - e) + e(\frac{1}{y} - \frac{1}{\pi})\right| \overset{\triangle - ey}{\leq} \left|\frac{1}{y}(x - e)\right| + \left|e(\frac{1}{y} - \frac{1}{\pi})\right|$$

Jälleen käyttämällä tehtävän K4 tulosta $|xy| = |x||y|$ saamme

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{e}{\pi}\right| \leq \left|\frac{1}{y}(x - e)\right| + \left|e(\frac{1}{y} - \frac{1}{\pi})\right| = \left|\frac{1}{y}\right| |x - e| + |e| \left|(\frac{1}{y} - \frac{1}{\pi})\right|$$

Saimme jälleen erotuksen $(x - e)$ itseisarvon kaivettua esiin, mutta erotus $(1/y - 1/\pi)$ näyttää vielä huonolta. Pienellä manipulaatiolla siitäkin selvitään:

$$\left|\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{\pi}\right)\right| = \left|\left(\frac{\pi}{y\pi} - \frac{y}{y\pi}\right)\right| = \left|\frac{\pi - y}{y\pi}\right| = \left|\frac{1}{y\pi}\right| |\pi - y| = \left|\frac{1}{y\pi}\right| |-1| \, |y - \pi| = \left|\frac{1}{y\pi}\right| |y - \pi|$$

Nyt saamme taas käyttämällä tehtävänannon oletuksia arvion:

$$\left|\frac{x}{y} - \frac{e}{\pi}\right| \leq \left|\frac{1}{y}\right| |x - e| + |e| \left|(\frac{1}{y} - \frac{1}{\pi})\right| = \left|\frac{1}{y}\right| |x - e| + \left|\frac{e}{y\pi}\right| |y - \pi| < \left|\frac{1}{y}\right| 9^{-9} + \frac{e}{\pi}\left|\frac{1}{y}\right| 9^{-9}.$$

Tarvitsemme vielä arvion itseisarvolle $|1/y|$, jonka saamme samassa hengessä kuin edellisessä tehtävässä:

$$|y - \pi| < 9^{-9} \overset{IAL}{\Leftrightarrow} -9^{-9} < y - \pi < 9^{-9} \Leftrightarrow \pi - 9^{-9} < y < \pi + 9^{-9}.$$

Nyt siis $y > \pi - 9^{-9}(> 0$, siis voimme jakaa y:llä ja epäyhtälön järjestys säilyy. Myös $1/y > 0$.), joten jakamalla epäyhtälö y:llä ja $\pi - 9^{-9}$:llä saadaan $1/y < 1/(\pi - 9^{-9})$. Nyt voimme käyttää saatua arviota alkuperäisessä ongelmassa:

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{e}{\pi}\right| < \left|\frac{1}{y}\right|9^{-9}+\frac{e}{\pi}\left|\frac{1}{y}\right|9^{-9} < \frac{1}{\pi-9^{-9}}9^{-9}+\frac{e}{\pi}\frac{1}{\pi-9^{-9}}9^{-9} = \frac{9^{-9}}{\pi-9^{-9}}(1+\frac{e}{\pi}).$$

Näin sotkuisesta ylärajasta on kuitenkin vaikea sanoa yhtään mitään, joten arvioidaan vielä hieman ylöspäin saadaksemme selkeälukuisemman arvion (yllä oleva arvio on siis kuitenkin täysin kelpaava vastaus ja antaa tarkemman ylärajan erotuksen itseisarvolle, kuin alla saatava!):

$$\left|\frac{x}{y}-\frac{e}{\pi}\right| < \frac{9^{-9}}{\pi+9^{-9}}(1+\frac{e}{\pi}) < \frac{9^{-9}}{3}(1+\frac{e}{\pi}) < \frac{9^{-9}}{3}\cdot 2 < 9^{-9}.$$

K4 Todista itseisarvon määritelmän avulla:
(a) $|x| \geq 0$
(b) $|x| = |-x|$
(c) $|xy| = |x||y|$.
Ratkaisu. Itseisarvo määritellään luentomonisteessa seuraavasti:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{, jos } x \geq 0 \\ -x & \text{, jos } x < 0 \end{cases}.$$

(a)
(i) jos $x \geq 0$, niin itseisarvon määritelmän nojalla $|x| = x \geq 0$.
(ii) jos $x < 0$, niin itseisarvon määritelmän nojalla $|x| = -x > 0$. Siis $|x| \geq 0$.

(b)
(i) jos $x > 0$, niin itseisarvon määritelmän nojalla $|x| = x$. Tällöin $-x < 0$, joten itseisarvon määritelmän nojalla $|-x| = -(-x) = x$
(ii) jos $x < 0$, niin itseisarvon määritelmän nojalla $|x| = -x$. Tällöin $-x > 0$, joten itseisarvon määritelmän nojalla $|-x| = -x$. Siis $|x| = |-x|$.
(iii) jos $x = 0$, niin itseisarvon määritelmän nojalla $|x| = x = 0$. Tällöin $-x = 0$, joten itseisarvon määritelmän nojalla $|-x| = x = 0$. Siis $|x| = |-x|$.

Huom! tehtävän voi hyvin tehdä myös vain tarkastelemalla kahta eri tilannetta, $x \geq 0$ ja $x < 0$, mutta ylläoleva tilanteen $x = 0$ erillinen tarkastelu selkeyttää ehkä hieman ratkaisua. Sama pätee (c)-kohdalle.

(c)
(i) jos $x \geq 0$ ja $y \geq 0$ niin $xy \geq 0$. Siis itseisarvon määritelmän nojalla $|xy| = xy = |x||y|$.
(ii) jos $x > 0$ ja $y < 0$, niin $xy < 0$. Siis itseisarvon määritelmän nojalla $|xy| = -xy = x(-y) = |x||y|$.
(iii) jos $x < 0$ ja $y > 0$, niin $xy < 0$. Siis itseisarvon määritelmän nojalla $|xy| = -xy = |x||y|$.
(iv) jos $x < 0$ ja $y < 0$, niin $xy > 0$. Siis itseisarvon määritelmän nojalla $|xy| = xy = (-x)(-y) = |x||y|$. Siis $|xy| = |x||y|$.
(v) jos $x = 0$ ja $y < 0$, niin $xy = 0 = -xy$. Siis itseisarvon määritelmän nojalla

$|xy| = xy = 0 = x(-y) = |x||y|$. Siis $|xy| = |x||y|$.
(vi) jos $x < 0$ ja $y = 0$, niin $xy = 0 = -xy$. Siis itseisarvon määritelmän nojalla $|xy| = xy = 0 = (-x)y = |x||y|$. Siis $|xy| = |x||y|$.

K5 Etsi sellainen $r > 0$, että kaikilla $x \in (2-r, 2+r)$ pätee $|x^2-4| < 10^{-100}$. Kannattaa soveltaa tehtävän K1 tulosta.

Ratkaisu. Rajoitutaan tarkastelemaan tilannetta, jossa $r < 1$. Olkoon $x \in (2-r, 2+r)$. Nyt $(2-r, 2+r) \subset (1,3)$, joten tehtävän K1 nojalla tiedämme: $|x^2-4| \leq 5|x-2|$. Nyt voimme tutkia, milloin $5|x-2| < 10^{-100}$, jolloin automaattisesti myös $|x^2-4| < 10^{-100}$:

$$|x^2-4| \leq 5|x-2| < 10^{-100} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{10^{-100}}{5}.$$

Tämä tarkoittaa siis sitä, että kun x:n etäisyys luvusta 2 on pienempi kuin $10^{-100}/5$, niin pätee $|x^2-4| < 10^{-100}$. Saatu luku $10^{-100}/5$ kertoo siis meille, miten valita etsittävä luku r. Valinnaksi kelpaa mikä tahansa lukua $(10^{-100})/5$ pienempi luku, sillä tällöin x pysyy vain entistä lähempänä lukua 2. Koska $(10^{-100})/5 > (10^{-100})/10 = 10^{-101}$, voimme siis valita esimerkiksi $r = 10^{-101}$.

Huom! Tehtävässä ei ole siis yhtä oikeaa vastausta, vaan tärkeää on löytää ”raja”, josta pienemmät luvut kaikki kelpaavat ratkaisuksi! Sama pätee myös seuraavassa tehtävässä.

K6 Etsi sellainen $r > 0$, että kaikilla $x \in (2-r, 2+r)$ pätee $|x^3-8| < 10^{-100}$. Kannattaa soveltaa tehtävän K2 tulosta.

Ratkaisu. Rajoitutaan tarkastelemaan tilannetta, jossa $r < 1$. Olkoon $x \in (2-r, 2+r)$. Nyt $(2-r, 2+r) \subset (1,3)$, joten tehtävän K2 nojalla tiedämme: $|x^3-8| \leq 19|x-2|$. Nyt voimme tutkia, milloin $19|x-2| < 10^{-100}$, jolloin automaattisesti myös $|x^3-8| < 10^{-100}$:

$$|x^3-8| \leq 19|x-2| < 10^{-100} \Leftrightarrow |x-2| < \frac{10^{-100}}{19}.$$

Tämä tarkoittaa siis sitä, että kun x:n etäisyys luvusta 2 on pienempi kuin $10^{-100}/19$, niin pätee $|x^3-8| < 10^{-100}$. Saatu luku $10^{-100}/19$ kertoo siis meille, miten valita etsittävä luku r. Valinnaksi kelpaa mikä tahansa lukua $(10^{-100})/19$ pienempi luku, sillä tällöin x pysyy vain entistä lähempänä lukua 2. Koska $(10^{-100})/19 > (10^{-100})/100 = (10^{-100})/(10^2) = 10^{-102}$, voimme siis valita $r = 10^{-102}$.