MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Tehtävät viikolle 41
Loppuviikon tehtävien ratkaisuehdotuksia, Miika Paavola

O3 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\frac{n^2-2}{n+1} \to \infty \text{ kun } n \to \infty.$$

Ratkaisu. Palautetaam mieleen luentomonisteen määritelmä 1.4.7: Lukujono (x_n) kasvaa rajatta, jos jokaista reaalilukua M kohti on olemassa sellainen $K \in \mathbb{N}_0$, että $x_n > M$ kaikilla $n > K$.

Aloitetaan arvioimalla osamäärää $(n^2-2)/(n+1)$ alaspäin, koska $a^2-b^2 = (a+b)(a-b)$ saamme:

$$\frac{n^2-2}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)-1}{n+1} = \frac{(n+1)(n-1)}{n+1} - \frac{1}{n+1} = n-1-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\leq 1} \geq n-2.$$

Nyt huomataan, että mielivaltaisella luvulla M pätee $n-2 > M$, jos $n > M+2$. Nyt olemme valmiit tekemään itse todistuksen:

Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Valitaan sellainen $K \in \mathbb{N}_0$, että $K \geq M+2$. Tällöin, jos $n > K$ niin

$$\frac{n^2-2}{n+1} = n-2 > K-2 \geq M+2-2 = M.$$

Näin ollen

$$\frac{n^2-2}{n+1} \to \infty, \text{ kun } n \to \infty.$$

O4 Oletetaan, että reaalilukujen joukot A ja B ovat epätyhjiä ja ylhäältä rajoitettuja. Osoita, että

$$\sup\{x+y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\} = \sup A + \sup B.$$

Ratkaisu. Määritellään $C := \{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\}$ Koska joukot A ja B ovat epätyhjiä ja ylhäältä rajoitettuja, tiedämme että $\sup A$,$\sup B \in \mathbb{R}$ ja edelleen $(\sup A + \sup B) \in \mathbb{R}$. Supremumin määritelmän nojalla saamme: kaikilla $x \in A$ pätee $x \leq \sup A$ ja kaikilla $y \in B$ pätee $y \leq \sup B$. Nyt siis mielivaltaisilla $x \in A$ ja $y \in B$ (eli siis $x + y \in C$) pätee:

$$x + y \leq \sup A + \sup B.$$

Tämä osoittaa että $\sup A + \sup B$ on jokin yläraja C:lle. Osoitetaan vielä että se on pienin. Oletetaan, että $c = \sup C < \sup A + \sup B$. Tällöin $c + h = \sup A + \sup B$ jollain $h \geq 0$ (ja siis $c = \sup A + \sup B - h$).

Nyt löydämme kuitenkin alkiot $x_0 \in A, y_0 \in B$ siten, että $x_0 > \sup A - h/2$ ja $y_0 > \sup B - h/2$. $(\star)$ Nyt $(x_0 + y_0) \in C$ ja

$$x_0 + y_0 > \sup A - \frac{h}{2} + \sup B - \frac{h}{2} = \sup A + \sup B - h = c.$$

Olemme nyt löytäneet joukkoon C kuuluvan alkion, joka on aidosti suurempi kuin c, joten se ei voi olla edes yläraja. Nyt olemme näyttäneet, ettei mikään $(\sup A + \sup B)$:tä pienempi luku voi olla C:n yläraja ja että $(\sup A + \sup B)$ on joukon C jokin yläraja. Siis supremumin määritelmän nojalla

$$\sup\{x + y \mid x \in A \text{ ja } y \in B\} = \sup A + \sup B.$$

$(\star)$ Jos $\sup A \in A$, niin voimme valita $x_0 = \sup A$, joka on aidosti suurempi kuin $\sup A - h/2$. Jos taas $\sup A \notin A$ ja joukossa A ei olisi sellaista alkiota x_0, että $x_0 > \sup A - h/2$, niin tällöin kaikilla $x \in A$ pätisi: $x \leq \sup A - h/2$. Tämä taas tarkoittaisi sitä, että $\sup A - h/2$ olisi joukon A jokin yläraja ja ollessaan pienempi kuin $\sup A$ tämä aiheuttaisi ristiriidan tehtävän oletusten kanssa. Luonnollisesti täysin sama päättely pätee myös y_0:lle.

K4 Osoita, että

$$n^2 - n \to \infty \text{ kun } n \to \infty.$$

Ratkaisu. Tehtävä on samankaltainen kuin **O3**, joten lähdetään taas arvioimaan lauseketta $n^2 - n$ alaspäin:

$$n^2 - n = n(n-1) \overset{n \geq 2}{\geq} n.$$

Nyt huomataan, että mielivaltaisella reaaliluvulla M pätee $n > M$, jos $n > M$. Nyt olemme valmiit tekemään itse todistuksen:

Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Valitaan sellainen $K \in \mathbb{N}_0$, että $K \geq \max\{M, 2\}$[1]. Tällöin, jos $n > K$ niin

$$n^2 - n \geq n = M.$$

Näin ollen

$$n^2 - n \to \infty, \text{ kun } n \to \infty.$$

K5 Selvitä

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}$$

käyttäen hyväksi tietoa

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} = e.$$

Tehtävässä saa käyttää myäs tietoa, että jos $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, niin $\sqrt[3]{x_n} \to \sqrt[3]{a}$ kun $n \to \infty$. (Mitenkähän tämän tiedon voisi todistaa?)

Ratkaisu. Huomataan ensiksi, että kun $k = 3n$, niin saamme:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n} = \lim_{k\to\infty} \left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k} = e.$$

Lauseen 1.2.8. Nojalla saamme: jos $x_n \to a$ kun $n \to \infty$, niin $x_n^2 \to a^2$ kun $n \to \infty$. Yhdistämällä tämän tehtävänannossa annettuun tietoon saamme: jos $x_n \to a$, niin $\sqrt[3]{x_n^2} \to \sqrt[3]{a^2}$.

Nyt muokkaamalla hieman tutkittavaa lauseketta saamme:

$$\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n} = \sqrt[3]{\left(\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{2n}\right)^3} = \sqrt[3]{\left(\left(1 + \frac{1}{3n}\right)^{3n}\right)^2} \to \sqrt[3]{e^2},$$

[1] tehtävän alussa tekemämme päättely toimii vain arvoilla $n \geq 2$, joten meidän täytyy varmistaa, että myös $K \geq 2$.

kun $n \to \infty$. Siis olemme osoittaneet, että

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n} = \sqrt[3]{e^2}.$$

Extra: Tätä ei tehtävässä pyydetty, mutta näytetään miksi on totta: jos $x_n \to a$ niin $\sqrt[3]{x_n} \to \sqrt[3]{a}$. Oletetaan yksinkertaistuksen vuoksi, että $a \neq 0$, sillä tehtävässämme selvästi raja-arvo poikkeaa nollasta. Tiedetään, että $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$. Lisäksi koska $x_n \to a$, niin kyllin suurilla n tiedämme että x_n ja a ovat samanmerkkiset ja täten $x_n a > 0$. Saamme siis laventamalla $(\sqrt[3]{x_n^2}+\sqrt[3]{x_n a}+\sqrt[3]{a^2})$:lla tutkittavan erotuksen $\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{a}$:

$$\left|\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{a}\right| = \left|\frac{x_n-a}{\sqrt[3]{x_n^2}+\sqrt[3]{x_n a}+\sqrt[3]{a^2}}\right| = \frac{|x_n-a|}{\sqrt[3]{x_n^2}+\sqrt[3]{x_n a}+\sqrt[3]{a^2}} \leq \frac{|x_n-a|}{\sqrt[3]{a^2}}.$$

Nyt $|x_n-a|/\sqrt[3]{a^2} < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n-a| < \sqrt[3]{a^2}\varepsilon$.

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $x_n \to a$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla löydämme sellaisen $K \in \mathbb{N}$ että kun $n > K$ niin x_n ja a ovat samanmerkkiset sekä $|x_n - a| < \sqrt[3]{a^2}\varepsilon$. Nyt kun $n > K$ niin:

$$\left|\sqrt[3]{x_n}-\sqrt[3]{a}\right| \leq \frac{|x_n-a|}{\sqrt[3]{a^2}} < \frac{\sqrt[3]{a^2}\varepsilon}{\sqrt[3]{a^2}} = \varepsilon$$

Olemme nyt osoittaneet että

$$\sqrt[3]{x_n} \to \sqrt[3]{a}$$

.

K6 Oletetaan, että $x_n \to \infty$ ja $y_n \to a$ kun $n \to \infty$; tässä a on reaaliluku. Pitääkö paikkansa, että tällöin $x_n + y_n \to \infty$ kun $n \to \infty$?

Ratkaisu. Olkoon $M \in \mathbb{R}$. Tiedetään, että $x_n \to \infty$, joten löytyy sellainen $K_x \in \mathbb{N}_0$ jolle pätee: kun $n > K_x$, niin $x_n > M$. Samoin löydämme myös sellaisen $K_x \in \mathbb{N}_0$, että kun $n > K_x$, niin $x_n > M + 1/2 - a$.

Edelleen koska $y_n \to a \in \mathbb{R}$, niin lukujonon raja-arvon määritelmän nojalla löytyy sellainen $K_y \in \mathbb{N}$ jolle pätee: kun $n > K_y$, niin $|y_n - a| < 1/2 \overset{IAL}{\Rightarrow}$

$y_n > a - 1/2$.

Valitaan $K = max\{K_x, K_y\}$. Nyt kun $n > K$, niin saamme:

$$x_n + y_n > M + 1/2 - a + a - 1/2 = M.$$

Olemme nyt näyttäneet, että lukujonon rajatta kasvamisen määritelmän ehto toteutuu joten $x_n + y_n \to \infty$, kun $n \to \infty$.