MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 1 2013
Tehtävät viikolle 47
Loppuviikon ratkaisuehdotuksia, Antti Pohjanpalo

O3 Oletetaan, että funktio f on jatkuva välillä $[0, 5]$ ja derivoituva välillä $(0, 5)$. Oletetaan lisäksi, että kaikilla $x \in (0, 5)$ pätee $-1 < f'(x) < 3$. Mitä tämän perusteella voidaan sanoa arvosta $f(5)$, jos tiedetään, että $f(0) = 7$? Tehtävässä on tarkoitus käyttää väliarvolausetta.

Ratkaisu. Väliarvolauseen (Lause 5.3.5) nojalla on olemassa $\xi \in (0, 5)$, jolle

$$f'(\xi) = \frac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \frac{f(5) - 7}{5}.$$

Täten

$$f(5) = 5f'(\xi) + 7, \tag{1}$$

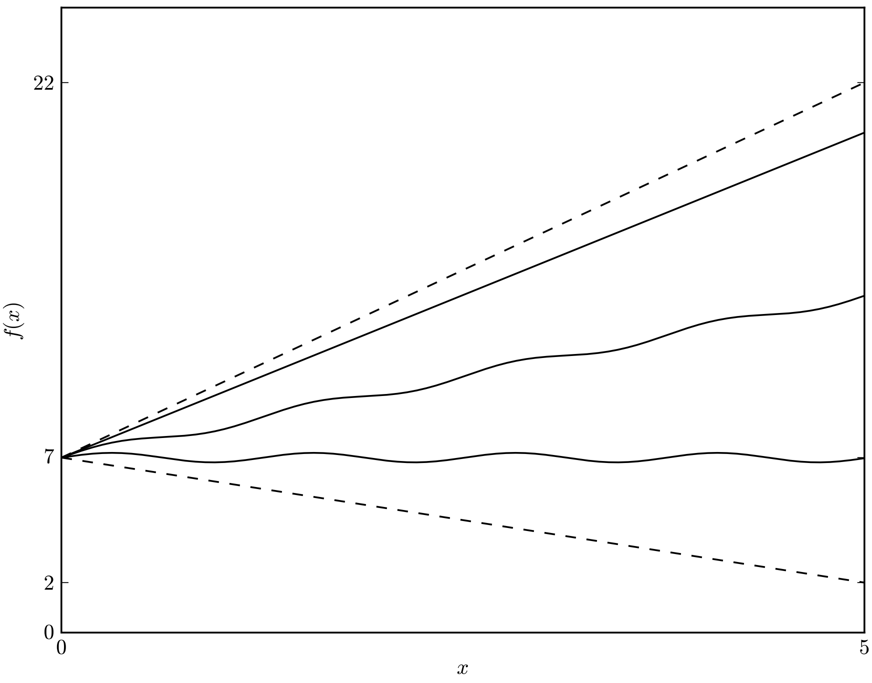
missä $\xi \in (0, 5)$. Koska tehtävänannon nojalla kaikilla $x \in (0, 5)$ pätee $-1 < f'(x) < 3$, niin yhtälöä (1) käyttäen saadaan arviot

$$f(5) < 5 \cdot 3 + 7 = 22$$

ja

$$f(5) > 5 \cdot (-1) + 7 = 2.$$

On siis päätelty, että $2 < f(5) < 22$.



Kuva 1: Tehtävän geometristä tulkintaa ja muutama vaatimuksen $-1 < f'(x) < 3$ toteuttavan funktion kuvaaja.

O4 Johda tulon derivointisääntö differentioituvuuden (lemma 5.2.9 sivulla 82) avulla. Toisin sanoen, tarkastellaan yhtälöitä

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + hu(h)$$

ja

$$g(x+h) = g(x) + g'(x)h + hv(h),$$

missä $u(h) \to 0$ ja $v(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Kerro yhtälöiden oikeat puolet keskenään. Mitä huomaat?

Ratkaisu. Oletetaan, että tehtävänannon yhtälöt pätevät kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Osoitetaan, että funktiolle fg on voimassa vastaava hajotelma kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Tällöin Lemman 5.2.10 nojalla ensinnäkin funktio fg on derivoituva ja toisekseen funktion fg derivaatta nähdään hajotelmasta.

Ensin kertomalla tehtävänannon yhtälöiden oikeat puolet keskenään ja tämän jälkeen järjestelemällä termejä uudestaan, kaikilla $x \in \mathbb{R}$ saadaan

$$\begin{aligned} f(x+h)g(x+h) &= f(x)g(x) + f(x)g'(x)h + f(x)hv(h) \\ &\quad + f'(x)hg(x) + f'(x)hg'(x)h + f'(x)hhv(h) \\ &\quad + hu(h)g(x) + hu(h)g'(x)h + hu(h)v(h) \\ &= f(x)g(x) + \Big(f(x)g'(x) + f'(x)g(x)\Big)h \\ &\quad + h\Big(f(x)v(h) + f'(x)g'(x)h + f'(x)hv(h) \\ &\qquad + u(h)g(x) + u(h)g'(x)h + u(h)v(h)\Big). \end{aligned} \tag{2}$$

Kun $x \in \mathbb{R}$ on kiinteä, niin selvästi

$$\begin{aligned} &f(x)v(h) + f'(x)g'(x)h + f'(x)hv(h) \\ &+ u(h)g(x) + u(h)g'(x)h + u(h)v(h) \\ &\longrightarrow 0, \end{aligned}$$

kun $h \to \infty$. Täten hajotelman (2) ja Lemman 5.2.10 nojalla funktio fg on derivoituva jokaisessa pisteessä $x \in \mathbb{R}$ ja derivaatta on

$$f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$$

kaikilla $x \in \mathbb{R}$.

K4 Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ asettamalla $f(x) = \sqrt{x}$, kun $x \geq 0$ ja $f(x) = -\sqrt{-x}$, kun $x < 0$. Missä pisteissä f on derivoituva?

Ratkaisu. Jaetaan funktion f derivoituvuuden tarkastelu kolmeen eri tapaukseen. Tarkastelut saattavat näyttää raskailta, mutta jokainen tapaus sisältää kaksi vaihtoehtoista tapaa, joista aina jälkimmäinen on kevyempi. Ennen tarkasteluja huomataan (tätä tarvitaan ainoastaan 'raskaammissa' vaihtoehdoissa), että kaikilla $x < 0$ pätee

$$x = -\sqrt{x^2} = -\sqrt{(-x)(-x)} = -\sqrt{-x}\sqrt{-x} = -(\sqrt{-x})^2. \tag{3}$$

1. *Oletetaan, että* $x_0 > 0$. Tällöin erotusosamäärälle pätee

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{x - x_0} = \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x_0}}{(\sqrt{x} - \sqrt{x_0})(\sqrt{x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x_0}} \longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}}, \end{aligned}$$

kun $x \to x_0$. Toisin sanoen

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}.$$

Vaihtoehtoisesti tämä nähdään suoraan Korollaarin 5.2.14 nojalla.

2. *Oletetaan, että* $x_0 < 0$. Oletetaan lisäksi, että $x < 0$. Tällöin erotusosamäärälle pätee (kohtaa (3) käyttäen)

$$\begin{aligned}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \frac{-\sqrt{-x} - (-\sqrt{-x_0})}{x - x_0} = \frac{\sqrt{-x_0} - \sqrt{-x}}{(\sqrt{-x_0})^2 - (\sqrt{-x})^2} \\ &= \frac{\sqrt{-x_0} - \sqrt{-x}}{(\sqrt{-x_0} - \sqrt{-x})(\sqrt{-x_0} + \sqrt{-x})} = \frac{1}{\sqrt{-x_0} + \sqrt{-x}} \\ &\longrightarrow \frac{1}{2\sqrt{-x_0}},\end{aligned}$$

kun $x \to x_0$. Toisin sanoen

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{-x_0}}.$$

Vaihtoehtoisesti tämä nähdään ketjusäännön (Lause 5.2.11) ja Korollaarin 5.2.14 nojalla. Nimittäin, Lauseessa 5.2.11 'ulkofunktioksi' (lauseen merkinnöin g) voidaan valita $-\sqrt{x}$ ja 'sisäfunktioksi' (lauseen merkinnöin f) voidaan valita $-x$.

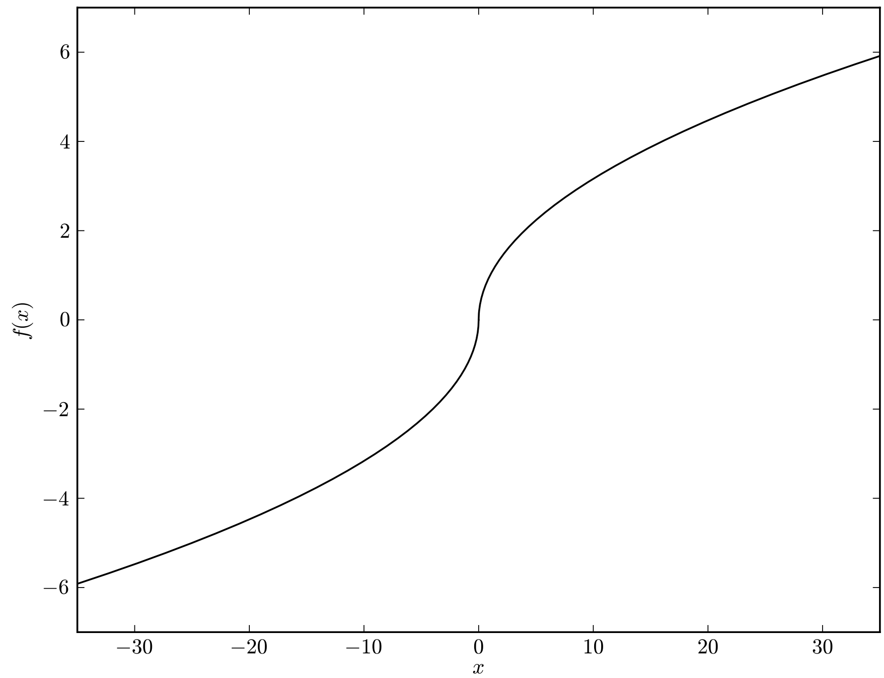
3. *Oletetaan, että* $x_0 = 0$. Funktiolla f ei ole Määritelmän 5.1.6 mukaisia toispuoleisia derivaattoja pisteessä x_0, sillä (kohtaa (3) käyttäen)

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to 0-} \frac{-\sqrt{-x}}{x} = \lim_{x \to 0-} \frac{-\sqrt{-x}}{-(\sqrt{-x})^2} \\ &= \lim_{x \to 0-} \frac{1}{\sqrt{-x}} = \infty.\end{aligned}$$

ja

$$\lim_{x \to x_0+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \to 0+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

Lauseen 5.1.9 nojalla kumpi vain näistä tiedoista riittää osoittamaan, että f ei ole derivoituva pisteessä x_0.



Kuva 2: Funktion f kuvaaja.

K5 Tarkastellaan yhtälöllä $f(x) = x^4$ määriteltyä funktiota $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Päättele derivaatta $f'(x)$ lemman 5.2.9. avulla yhtälöstä

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + 6x^2h^2 + 4xh^3 + h^4.$$

Ratkaisu. Olkoon $x \in \mathbb{R}$. Kirjoitetaan tehtävänannon yhtälö muodossa

$$(x+h)^4 = x^4 + 4x^3h + h\Big(6x^2h + 4xh^2 + h^3\Big) \tag{4}$$

ja määritellään funktio $u\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $u(h) = 6x^2h + 4xh^2 + h^3$. Koska x on kiinteä, niin selvästi $u(h) \to 0$, kun $h \to 0$. Täten hajotelman (4) ja Lemman 5.2.10 nojalla f on derivoituva pisteessä x ja derivaatta $f'(x) = 4x^3$.

K6 Oletetaan, että p, q ja r ovat reaalilukuja ja että $p > 0$. Osoita, että yhtälöllä

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

on enintään kaksi erisuurta reaalijuurta. Vihje: merkitse $f(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ ja sovella kurssin tietoja.

Ratkaisu. Toimitaan vihjeen mukaisesti. Funktion f ensimmäiseksi ja toiseksi derivaataksi saadaan

$$f'(x) = 4x^3 + 2px + q$$

ja

$$f''(x) = 12x^2 + 2p.$$

Nähdään, että $f''(x) > 0$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$. Täten Lauseen 5.3.10 nojalla f' on aidosti kasvava koko joukossa $\mathbb{R}$. Siis on olemassa korkeintaan yksi $x_0 \in \mathbb{R}$, jolle

$$f'(x_0) = 0. \tag{5}$$

Oletetaan nyt, että funktiolla f olisi yli kaksi erisuurta reaalijuurta, eli ainakin juuret $a < b < c$. Tällöin Rollen lauseen (Lause 5.3.3) nojalla on olemassa $\xi_1 \in (a, b)$ ja $\xi_2 \in (b, c)$ siten, että $f'(\xi_1) = 0 = f'(\xi_2)$. Tämä on ristiriita kohdan (5) kanssa. Siis funktiolla f on korkeintaan kaksi erisuurta reaalijuurta.