MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

ANALYYSI I 2013

TEHTÄVÄT VIIKOLLE 44

ALKUVIIKON RATKAISUEHDOTUKSET, Alexandra Pavel

01. (a) Miten määrittelet funktion käsitteen?

Ratkaisu: Funktio voi määritellä eri tavalla.

Olkoon A ja B kaksi ei-tyhjää joukkoa. Sellaista sääntöä tai lakia joka liittää joukon A jokaiseen alkioon täsmälleen yhden alkion joukosta B, sanotaan funktioksi tai kuvaukseksi joukosta A joukkoon B

(b) Mitkä ovat tärkeimmät lukiossa opitut tiedot jatkuvista ja derivoituvista funktioista?

Ratkaisu:

Jatkuvista funktioista.

- Bolzanon lause ja jatkuvan funktion väliarvolause, suurimman ja pienimmän arvo olemassaolo lause.

Derivoituvista funktioista

- "Jos funktio f on derivoituva kohdassa a, niin se on jatkuva kohdassa a".
- Integraalinlaskennan peruslause

(c) Mitä haluat oppia funktioiden raja arvoista, jatkuvuudesta ja derivaatasta tällä kurssilla?

Ratkaisu:

ESM
- Funktion raja-arvon ja sen yleistysten ymmärtäminen
- Jatkuvien funktioiden keskeiset ominaisuudet kuten Bolzanon lause ja min/max-lause
- Derivaatan käsite ja derivointisäännöt

02. (a) Miten funktioiden jatkuvuus ja derivoituvuus on määritelty lukiossa?

Ratkaisu:

- Funktion jatkuvuus

Funktio f on jatkuva määrittelyjoukkonsa kohdass a, jos funktion arvo kohdassa a on yhtä suuri kuin funktion raja-arvo kohdassa a eli jos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

- Funktion derivoituvuus:

Oletetaan, että funktion f on määritelty kohdan x_0 ympäristössä

Jos erotusosamäärän raja arvon $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ on olemassa, niin funktio f on derivoituva kohdassa x_0

Erotusosamäärän raja-arvoa sanotaan funktion f derivaataksi kohdassa x_0, ja merkitään $f'(x_0)$.

(b) Seuraako derivoituvuudesta jatkuvuus?

Ratkaisu:

- Derivoituva funktio on aina jatkuva.

On todistettu prujussa: lause 1.5.4.

(c) Seuraako jatkuvuudesta derivoituvuus?

Ratkaisu:

- Jatkuva funktio ei välttämättä ole derivoituv

Jatkuvuus on siis välttämätön ehto derivoituvuudelle, mutta ei riittävä.

ESIM. itseisarvofunktio, jonka derivoimattomuus osoitetaan tehtävässä K5.

K1. (a) Etsi jokin luku $A > 0$, jolle kaikilla $x \in (6,8)$ pätee.

$$|x^2 - 49| \leq A|x-7|$$

Ratkaisu:

Huomataan, että $x^2 - 49$ voidaan kirjoittaa muodossa $(x+7)(x-7)$

Lisäksi kun $x \in (6,8)$, niin pätee

$$6+7 < x+7 < 8+7$$
$$\Leftrightarrow 13 < x+7 < 15$$

Sovelletaan nyt nätä ja tietoa $|xy| = |x||y|$ tehtävän itseisarvoon

$$|x^2 - 49| = |(x+7)(x-7)| = |x+7||x-7| \leq (8+7)|x-7|$$
$$= 15|x-7|$$

Luvuksi A voidaan siis valita $A = 15$.

(b) Oletetaan, että $\varepsilon > 0$. Osoita, että on olemassa sellainen luku $\delta > 0$ että kaikille $x \in (7-\delta, 7+\delta)$ (eli aina kun $|x-7| < \delta$), pätee

$$|x^2 - 49| < \varepsilon$$

Ratkaisu:

Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{15}\}$ Nyt aina kun $0 < |x-7| < \delta$, niin $|x-7| < 1$ eli $6 < x < 8$ pätee

$$|x^2 - 49| = |(x+7)(x-7)| = |x+7||x-7| \leq (8+7)|x-7|$$
$$= 15|x-7| < 15\delta \leq \cancel{15}\frac{\varepsilon}{\cancel{15}} = \varepsilon$$

K2. (a) Etsi jokin luku $A > 0$, jolle kaikilla $x \in (1,3)$ pätee

$$\left|\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}\right| \leq A|x-2|.$$

Ratkaisu:

Huomataan, että $\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}$ voidaan kirjoittaa muodossa.

$$\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3} = \frac{3x-3-x-1}{3(x+1)} = \frac{2x-4}{3(x+1)} = \frac{2}{3(x+1)}(x-2)$$

Lisäksi kun $x \in (1,3)$, niin pätee:

$$\frac{2}{3(3+1)} < \frac{2}{3(x+1)} < \frac{2}{3(1+1)}$$

$$\iff \frac{1}{6} < \frac{2}{3(x+1)} < \frac{1}{3}$$

Sovelletaan nyt näitä ja tietoa $|xy| = |x||y|$ tehtävän itseisarvoon:

$$\left|\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{2x-4}{3(x+1)}\right| = \left|\frac{2}{3(x+1)}\right||x-2| \leq \frac{2}{3(1+1)}|x-2| = \frac{1}{3}|x-2|$$

Luvuksi A voidaan siis valita $A = \frac{1}{3}$.

(b) Oletetaan, että $\varepsilon > 0$ Osoita, että on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että kaikille $x \in (2-\delta, 2+\delta)$ pätee:

$$\left|\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}\right| < \varepsilon.$$

Ratkaisu:

Olkoon $\varepsilon > 0$ Valitaan $\delta = \min\{1, \varepsilon\}$ Nyt aina kun $0 < |x-2| < \delta$, niin $|x-2| < 1$ eli $1 < x < 3$ pätee:

$$\left|\frac{x-1}{x+1} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{2}{3(x+1)}(x-2)\right| = \left|\frac{2}{3(x+1)}\right||x-2| \leq \frac{2}{3(1+1)}|x-2|$$

$$= \frac{1}{3}|x-2| < |x-2| < \delta \leq \varepsilon.$$

K3. (a) Etsi jokin luku $A>0$, jolle kaikilla $x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$ pätee:

$$\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right| \leq A\left|x-\frac{1}{4}\right|$$

Ratkaisu:

Huomataan, että $\sqrt{x}-\frac{1}{2}$ voidaan kirjoittaa muodossa:

$\sqrt{x}+\frac{1}{2}$

$$\sqrt{x}-\frac{1}{2} = \frac{\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}} = \frac{x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}}\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

Lisäksi, $x \in \left(\frac{1}{8}, \frac{3}{8}\right)$ niin pätee

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{8}}+\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}} < \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{2+\sqrt{6}} < \frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}} < \frac{4}{2+\sqrt{2}}$$

Sovelletaan nyt näitä ja tietoa $|xy| = |x||y|$ tehtävän itseisarvoon

$\sqrt{x}+\frac{1}{2}$

$$\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}}\right|\left|x-\frac{1}{4}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{8}}+\frac{1}{2}}\left|x-\frac{1}{4}\right| = \frac{4}{2+\sqrt{2}}\left|x-\frac{1}{4}\right|$$

Luvuksi A voidaan siis valita $A = \frac{4}{2+\sqrt{2}}$

(b) Oletetaan, että $\varepsilon > 0$ Osoita, että on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että kaikille $x \in \left(\frac{1}{4}-\delta, \frac{1}{4}+\delta\right)$ patee:

$$\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

Ratkaisu:

Oletetaan, että $\varepsilon > 0$ Valitaan $\delta = \min\left\{\frac{1}{8}, \varepsilon \Big/ \frac{4}{2+\sqrt{2}}\right\}$

Nyt aina kun $0 < \left|x-\frac{1}{4}\right| < \delta$, niin $\left|x-\frac{1}{4}\right| < \frac{1}{8}$ eli $\frac{1}{8} < x < \frac{3}{8}$ pätee

$\sqrt{x}+\frac{1}{2}$

$$\left|\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{x-\frac{1}{4}}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{x}+\frac{1}{2}}\right|\left|x-\frac{1}{4}\right| \leq \left(\frac{4}{2+\sqrt{2}}\right)\left|x-\frac{1}{4}\right| < \left(\frac{4}{2+\sqrt{2}}\right)\delta$$

$$\leq \cancel{\left(\frac{4}{2+\sqrt{2}}\right)} \cdot \frac{\varepsilon}{\cancel{\left(\frac{4}{2+\sqrt{2}}\right)}} = \varepsilon.$$