MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi 1 2013
Tehtävät viikolle 39
Alkuviikon ratkaisuehdotuksia, Antti Pohjanpalo

Lukujono (x_n) suppenee kohti lukua $a \in \mathbb{R}$, jos jokaista lukua $\varepsilon > 0$ vastaa sellainen luku $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, että

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad \text{kun } n > n_\varepsilon.$$

Tällöin merkitään

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Lukujonon (x_n) raja-arvon a olemassaoloa todistettaessa on ensisijaisena tavoitteena löytää lausekkeelle $|x_n - a|$ sellainen aito yläraja, joka saadaan mielivaltaisen pieneksi valitsemalla n riittävän suureksi.

O1 Osoita, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 2$$

on tosi.

Ratkaisu. Arvioidaan aluksi lukujonon $\left(\frac{2n+1}{n+2}\right)$ jäsenten etäisyyttä luvusta 2:

$$\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{2n+1-2(n+2)}{n+2}\right| = \left|\frac{-3}{n+2}\right| = \frac{3}{n+2} < \frac{3}{n}.$$

Tämän avulla voimme muotoilla täsmällisen todistuksen lukujonon raja-arvon määritelmää käyttäen: Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $\frac{3}{n} < \varepsilon$ aina, kun $n > \frac{3}{\varepsilon}$. Valitaan luvuksi n_ε pienin luonnollinen luku, jolle $n_\varepsilon \geq \frac{3}{\varepsilon}$. Tällöin kaikilla $n > n_\varepsilon$ pätee

$$\left|\frac{2n+1}{n+2} - 2\right| < \frac{3}{n} < \frac{3}{n_\varepsilon} \leq \frac{3}{\frac{3}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Täten tehtävän väite on tosi.

O2 Osoita, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n+2} = 1$$

on epätosi.

Ratkaisu. Koska lukujonon raja-arvo on yksikäsitteinen, niin tehtävän O1 nojalla väitteen on oltava epätosi. Osoitetaan väite epätodeksi kuitenkin lukujonon raja-arvon määritelmää käyttäen. Arvioidaan aluksi seuraavasti:

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+1}{n+2} - 1\right| &= \left|\frac{2n+1-(n+2)}{n+2}\right| = \left|\frac{n-1}{n+2}\right| \overset{n\geq 1}{=} \frac{n-1}{n+2} = \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{n+2} \\ &\overset{n\geq 1}{\geq} \frac{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}{3n} = \frac{1-\frac{1}{n}}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3n} \overset{n\geq 2}{\geq} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

Olkoon nyt $\varepsilon = \frac{1}{6}$. Edeltävän arvion nojalla kaikilla $n \geq 2$ pätee

$$\left|\frac{2n+1}{n+2} - 1\right| \geq \varepsilon.$$

Täten ei ole olemassa sellaista lukua $n_\varepsilon \in \mathbb{N}_0$, että

$$\left|\frac{2n+1}{n+2} - 1\right| < \varepsilon,$$

kun $n > n_\varepsilon$. Tehtävän väite on siis epätosi.

K1 Osoita, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{3n+1} = \frac{2}{3}$$

on tosi.

Ratkaisu. Arvioidaan aluksi seuraavasti:

$$\begin{aligned}\left|\frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| &= \left|\frac{3(2n+1)-2(3n+1)}{3(3n+1)}\right| = \left|\frac{1}{3(3n+1)}\right| \\ &= \frac{1}{3(3n+1)} < \frac{1}{3n+1} < \frac{1}{3n} < \frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $\frac{1}{n} < \varepsilon$ aina, kun $n > \frac{1}{\varepsilon}$. Valitaan luvuksi n_ε pienin luonnollinen luku, jolle $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Tällöin kaikilla $n > n_\varepsilon$ pätee

$$\left|\frac{2n+1}{3n+1} - \frac{2}{3}\right| < \frac{1}{n} < \frac{1}{n_\varepsilon} \leq \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Täten tehtävän väite on tosi.

K2 Osoita, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{4 + \frac{3}{n}} = 2$$

on tosi.

Ratkaisu. Käyttämällä hyödyksi kaavaa

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b), \quad a, b \in \mathbb{R},$$

voidaan arvioida seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\left|\sqrt{4 + \frac{3}{n}} - 2\right| &= \left|\frac{\left(\sqrt{4 + \frac{3}{n}} - 2\right)\left(\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2\right)}{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2}\right| = \left|\frac{4 + \frac{3}{n} - 4}{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2}\right| \\
&= \left|\frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2}\right| = \frac{\frac{3}{n}}{\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2} = \frac{3}{n\left(\sqrt{4 + \frac{3}{n}} + 2\right)} \\
&< \frac{3}{n\sqrt{4 + \frac{3}{n}}} < \frac{3}{n\sqrt{4}} = \frac{3}{2n} < \frac{3}{n}.
\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $\frac{3}{n} < \varepsilon$ aina, kun $n > \frac{3}{\varepsilon}$. Valitaan luvuksi n_ε pienin luonnollinen luku, jolle $n_\varepsilon \geq \frac{3}{\varepsilon}$.. Tällöin kaikilla $n > n_\varepsilon$ pätee

$$\left|\sqrt{4 + \frac{3}{n}} - 2\right| < \frac{3}{n} < \frac{3}{n_\varepsilon} \leq \frac{3}{\frac{3}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Täten tehtävän väite on tosi.

K3 Osoita, että väite

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$$

on tosi.

Ratkaisu. Edeltävän tehtävän ratkaisun tyylisesti voidaan tässäkin tapauksessa arvioida seuraavasti:

$$\begin{aligned}
\left|\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)-0\right| &= \left|\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \\
&= \left|\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| = \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Tällöin $\frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$ aina, kun $\sqrt{n} > \frac{1}{\varepsilon}$. Valitaan luvuksi n_ε pienin luonnollinen luku, jolle $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon^2}$. Tällöin kaikilla $n > n_\varepsilon$ pätee

$$\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right| < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n_\varepsilon}} \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon.$$

Täten tehtävän väite on tosi.