MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Tehtävät viikolle 49
Ratkaisuehdotuksia (Miika Paavola)

O-tehtävissä on viime syksyn toisen kurssikokeen tehtävät.

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

O1 Selvitä
$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+1}{6x+1}.$$
Perustele väitteesi huolellisesti kurssin tietojen avulla.

Ratkaisu. Tiedämme, että $\lim_{x\to 2} x = 2$ ja $\lim_{x\to 2} a = a$ kaikilla $a \in \mathbb{R}$. Nyt voimme lauseen 3.1.10 nojalla rakentaa osoittajan ja nimittäjän raja-arvot pala palalta:
$$\lim_{x\to 2} x^2 = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x = 2 \cdot 2 = 4$$
$$\lim_{x\to 2} 3x^2 = \lim_{x\to 2} 3 \cdot \lim_{x\to 2} x^2 = 3 \cdot 4 = 12$$
$$\lim_{x\to 2} 3x^2 + 1 = \lim_{x\to 2} 3x^2 + \lim_{x\to 2} 1 = 12 + 1 = 13$$
$$\lim_{x\to 2} 6x = \lim_{x\to 2} 6 \cdot \lim_{x\to 2} x = 6 \cdot 2 = 12$$
$$\lim_{x\to 2} 6x + 1 = \lim_{x\to 2} 6x + \lim_{x\to 2} 1 = 12 + 1 = 13.$$
Näin ollen lopulta saamme samaa lausetta käyttäen (nimittäjän ollessa nollasta poikkeava):
$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+1}{6x+1} = \frac{\lim_{x\to 2} 3x^2+1}{\lim_{x\to 2} 6x+1} = \frac{13}{13} = 1.$$

O2 Määritellään, että $f(0) = 0$ ja
$$f(x) = x^3 \sin(\frac{1}{x^3})$$
kun $x \neq 0$. Osoita, että funktio f on derivoituva kohdassa $x = 0$.

Ratkaisu. Tarkastellaan erotusosamäärän raja-arvoa:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

Osoitetaan, että saatu raja-arvo on nolla: Olkoon $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$. Nyt kun $|x| = |x-0| < \delta$, niin saamme:

$$\left| x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) - 0 \right| = \left|x^2\right| \left| \sin\left(\frac{1}{x^3}\right)\right| \leq \left|x^2\right| \cdot 1 = |x| \cdot |x| \overset{|x|\leq 1}{\leq} |x| < \delta \leq \varepsilon.$$

Yhteenvetona saamme

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^3}\right) = 0,$$

eli f on derivoituva pisteessä $x = 0$ ja $f'(0) = 0$.

K1 Derivoi $x^{\frac{3}{5}}$
(a) käyttäen koulusta tuttua potenssin derivointisääntää,
(b) käyttäen yhdistetyn funktion, käänteisfunktion ja kokonaislukueksponenttia vastaavien potenssien derivointisääntöjä.

Ratkaisu. (a) Määritellään $f(x) = x^{\frac{3}{5}}$, jolloin koulusta tutuilla derivoimissäännöillä saamme:

$$f'(x) = \frac{3}{5} x^{\frac{3}{5}-1} = \frac{3}{5} x^{-\frac{2}{5}} = \frac{3}{5x^{\frac{2}{5}}}$$

(b) Näytetään sama käyttäen vain tehtävänannossa lueteltuja tietoja. Nyt ketjusäännön (lause 5.2.11) nojalla saamme

$$f'(x) = Dx^{\frac{3}{5}} = D\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^3 = 3\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2 Dx^{\frac{1}{5}}.$$

Merkitään $g(x) = x^5$, jolloin $g^{-1}(x) = x^{\frac{1}{5}}$ on funktion g käänteisfunktio (sillä $g(g^{-1}(x)) = (x^{\frac{1}{5}})^5 = x$). Nyt lause 5.2.13 antaa

$$(g^{-1})'(g(x_0)) = \frac{1}{g'(x_0)},$$

joten

$$Dx^{1/5} = (g^{-1})'(x) = (g^{-1})'(g(g^{-1}(x))) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(x^{\frac{1}{5}})} = \frac{1}{5(x^{\frac{1}{5}})^4} = \frac{1}{5x^{\frac{4}{5}}}.$$

Sijoitetaan saatu yhtälö alkuperäiseen yhtälöön ja saamme halutun tuloksen

$$f'(x) = 3\left(x^{\frac{1}{5}}\right)^2 Dx^{\frac{1}{5}} = \frac{3x^{\frac{2}{5}}}{5x^{\frac{4}{5}}} = \frac{3}{5x^{\frac{4}{5}}}.$$

K2 Oletetaan, että $x > 0$ ja että m, n ja p ovat positiivisia kokonaislukuja. Osoita juuren määritelmän ja kokonaislukueksponenttia vastaavien potenssien laskusääntöjen nojalla yhtälöt

(a) $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$,

(b) $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}}$.

Ratkaisu. Palautetaan mieleen juurifunktion määritelmä (sivulta 64): olkoon $n \in \mathbb{N}$. Funktion $f(x) = x^n$ käänteisfunktio on $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$. Käänteisfunktio on määritelty vain joukossa $[0, \infty)$ n:n ollessa parillinen. Tämä ei tuota ongelmaa, sillä oletimme $x > 0$. Voimme olettaa kuvauksien f ja f^{-1} lähtö- ja maalijoukkojen olevan $[0, \infty)$ riippumatta n:n arvosta.

(a) **Tapa 1** Koska käänteisfunktiolle pätee $f(f^{-1}(x)) = x$, voimme kirjoittaa:

$$f(\sqrt[n]{x^m}) = f(f^{-1}(x^m)) = x^m = ((\sqrt[n]{x})^n)^m = ((\sqrt[n]{x})^m)^n = f((\sqrt[n]{x})^m).$$

Funktion $f(x)$ ollessa bijektio voimme todeta, että $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$.

Tapa 2 Huomataan juuren määritelmän kanssa yhtäpitävä ehto:

$$\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x.$$

Tämän nojalla alkuperäinen väite $\sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ on yhtäpitävä väitteen $x^m = ((\sqrt[n]{x})^m)^n$ kanssa. Kokonaislukupotenssien laskusääntöjen nojalla saamme edelleen:

$$x^m = ((\sqrt[n]{x})^m)^n = ((\sqrt[n]{x})^n)^m = x^m,$$

joten saimme väitteen todistettua.

(b) **Tapa 1** (a)-kohdan nojalla $f(\sqrt[np]{x^{mp}}) = f((\sqrt[np]{x})^{mp})$, joten saamme kirjoitettua

$$f(\sqrt[np]{x^{mp}}) = f((\sqrt[np]{x})^{mp}) = (\sqrt[np]{x})^{mp})^n = (\sqrt[np]{x})^{np})^m = x^m = f(f^{-1}(x^m)) = f(\sqrt[n]{x^m}).$$

Nyt siis taas f:n bijektiivisyyden nojalla väite on todistettu.

Tapa 2 Jälleen juurifunktion määritelmän nojalla saamme väitteelle yhtäpitävän ehdon:

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[np]{x^{mp}} \Leftrightarrow x^m = (\sqrt[np]{x^{mp}})^n.$$

Nyt (a) kohdan nojalla saamme: $(\sqrt[np]{x^{mp}})^n = ((\sqrt[np]{x})^{mp})^n = ((\sqrt[np]{x})^{np})^m = x^m$, joka todistaa väitteen.

K3 Johda funktion $\sinh x$ käänteisfunktiolle logaritmilauseke ja derivointikaava. Tutki Hurri-Syrjäsen monistetta sivuilta 84 ja 85. Linkki siihen läytyy laitoksen kotisivulta s 2012 kurssin analyysi 1 kotisivulta.

Ratkaisu. Palautetaan ensiksi mieleen sinh:n määritelmä: $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$. Seurataan suoraan Hurri-Syrjäsen monisteen esimerkkiä sivulta 84 ja merkitään käänteisfunktiota $\operatorname{ar}\sinh = y$, jolloin saamme

$$\begin{aligned} x &= \sinh y = \tfrac{e^y - e^{-y}}{2} \\ \Leftrightarrow 2x &= e^y - e^{-y} && \mid \cdot e^y \\ \Leftrightarrow 0 &= (e^y)^2 - 2xe^y - 1. \end{aligned}$$

Nyt toisen asteen yhtälön ratkaisukaavasta (Huom. nyt ratkaistava tuntematon onkin e^y!) saadaan:

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{(-2x)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2} = x \pm \frac{\sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}.$$

Koska $e^y > 0$, voimme kelpuuttaa vain vaihtoehdon $e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$ (sillä $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = x$). Ottamalla puolittain luonnollisen logaritmin saamme:

$$y = \ln(e^y) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Käyttämällä ketjusääntöä selviämme myös derivoinnista:

$$\begin{aligned} D\operatorname{ar}\sinh x &= D\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} D(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1})} 2x\right) \\ &= \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \left(\frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1})}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}. \end{aligned}$$