Ratkaisuehdotuksia
Analyysi I 2013
Viikko 45
Joona Honkavaara

03 Onko olemassa raja-arvoa

$$\lim_{x\to\infty} \sin x?$$

Tehtävässä saa käyttää sinifunktiosta kaikkia koulusta tuttuja tietoja. Ratkaisua helpottaa, jos muotoilet ja todistat jonkin sopivan aputuloksen.

Ratkaisu 1 Lukiosta tiedetään, että

$$\sin(\frac{1}{2}\pi + 2n\pi) = 1,$$

ja

$$\sin(\frac{3}{2}\pi + 2n\pi) = -1,$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Jos pätisi että $\lim_{x\to\infty} \sin x = a$, jollain $a \in \mathbb{R}$, niin tällöin funktion raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa $h \in \mathbb{R}$, siten että

$$|\sin x - a| < \frac{1}{2},$$

kaikilla $x > h$. Itseisarvolemman nojalla saadaan, että

$$-\frac{1}{2} < \sin x - a < \frac{1}{2},$$

joka pätee jos ja vain jos

$$a - \frac{1}{2} < \sin x < a + \frac{1}{2}.$$

Olkoot $n \in \mathbb{N}$ sellainen, että $\frac{1}{2}\pi + 2n\pi > h$. Tästä seuraa, että

$$\frac{3}{2}\pi + 2n\pi > \frac{1}{2}\pi + 2n\pi > h.$$

Tällä valinnalla saadaan, että

$$\begin{aligned} & a - \frac{1}{2} < \sin(\frac{1}{2}\pi + 2n\pi) < a + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & a - \frac{1}{2} < 1 < a + \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{2} < a < \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Samaan tapaan saadaan, että

$$
\begin{aligned}
& a-\frac{1}{2}<\sin(\frac{3}{2}\pi+2n\pi)<a+\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \qquad & a-\frac{1}{2}<-1<a+\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \qquad & -\frac{3}{2}<a<-\frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

Saimme siis ristiriidan aikaan, joten ei ole olemassa $a \in \mathbb{R}$, siten että $\lim_{x\to\infty} \sin x = a$. Kysyttyä raja-arvoa ei siis ole olemassa.

Ratkaisu 2 Jos funktiolla $sin(x)$ olisi raja-arvo äärettömyydessä, niin tällöin voitaisiin todistaa, että kaikilla $\epsilon > 0$, on olemassa $K \in \mathbb{N}$, siten että

$$|sin(\frac{3}{2}\pi+2n\pi)-sin(\frac{1}{2}\pi+2n\pi)|<\epsilon,$$

kun $n > K$ ja $n \in \mathbb{N}$. Mutta nythän

$$|sin(\frac{3}{2}\pi+2n\pi)-sin(\frac{1}{2}\pi+2n\pi)|=|1-(-1)|=2,$$

joten valitsemalla $\epsilon = 1$ saamme aikaan ristiriidan, ja täten raja-arvo ei ole olemassa.

04 Oletetaan, että funktio $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ on kasvava. Mitä voimme päätellä, jos tiedämme lisäksi, ettei f ole jatkuva kohdassa $x = 0$?

Ratkaisu Koska f on kasvava, niin $f(x) \le f(y)$, jos $x, y \in (-1, 1)$ ja $x \le y$. Tiedämme siis, että kaikilla $a \in (-1, 1)$ funktion f oikean- ja vasemmanpuoleiset raja-arvot pisteessä a ovat olemassa äärellisinä. Tämä johtuu siitä, että aina löytyy $b, c \in (-1, 1)$, siten että $c < a < b$. Tällöin siis epätyhjä joukko $f((-1, a))$ on ylhäältä rajoitettu, eli sillä on äärellinen supremum, joka on kasvavuuden takia funktion f vasemmanpuoleinen raja-arvo pisteessä a.

Vastaavasti epätyhjä joukko $f((a, 1))$ on alhaalta rajoitettu, joten sen infimum on äärellisenä olemassa, ja taas kasvavuuden takia tämä on funktion f oikeanpuoleinen raja-arvo pisteessä a.

Oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa -1, sekä vastaavasti vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa 1, eivät ole välttämättä äärellisinä olemassa.

Erityisesti siis kohdassa 0 funktiolla f on oikean- ja vasemmanpuoleinen raja-arvo. Koska funktio f ei ole jatkuva kohdassa 0, niin on pädettävä, että

$$\lim_{x\to 0+} f(x) \neq f(0),$$

tai

$$\lim_{x\to 0-} f(x) \neq f(0),$$

tai että kummatkin raja-arvot eroavat funktion arvosta pisteessä 0. Nyt koska funktio on kasvava niin sillä on siis hyppy kohdassa 0.

K4 Osoita määritelmän perusteella, että

$$\lim_{x\to 3+} \frac{x^2-3}{x-3} = \infty.$$

Ratkaisu Oletetaan että $x > 3$, ja arvioidaan lauseketta $\frac{x^2-3}{x-3}$ alaspäin,

$$\frac{x^2-3}{x-3} \geq \frac{4-3}{x-3} = \frac{1}{x-3}.$$

Rajoitutaan tarkastelemaan positiivisia luvun M arvoja, koska

$$\frac{x^2-3}{x-3} \geq \frac{(\sqrt{3})^2-3}{x-3} = 0.$$

Oletetaan siis että $M > 0$. Valitaan $\delta = \frac{1}{M}$. Nyt kun $3 < x < 3+\delta$, eli $0 < x-3 < \delta$, niin

$$\frac{x^2-3}{x-3} \geq \frac{1}{x-3} > \frac{1}{\delta} = M.$$

Täten funktion raja-arvon määritelmän nojalla

$$\lim_{x\to 3+} \frac{x^2-3}{x-3} = \infty.$$

K5 Oletetaan, että funktio $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ on kasvava ja että $a < c < b$. Osoita, että

$$\lim_{x\to c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c+} f(x).$$

Ratkaisu 1 Koska $a < c < b$, ja f kasvava, niin esimerkiksi $f(a + \frac{|c-a|}{2}) \leq f(c) \leq f(b - \frac{|c-b|}{2})$. Täten siis epätyhjä joukko $f((a,c))$ on ylhäältä rajoitettu, joten sen supremum on äärellisenä olemassa ja monotonisuudesta seuraa, että

$$\lim_{x\to c-} f(x) = \sup f((a,c)) \leq f(c).$$

Viimeinen epäyhtälö johtuu siitä, että $f(c)$ on eräs yläraja joukolle $f((a,c))$.

Vastaavasti epätyhjä joukko $f((c,b))$ on alhaalta rajoitettu, joten sen infimum on äärellisenä olemassa ja monotonisuudesta seuraa, että

$$\lim_{x\to c+} f(x) = \inf f((c,b)) \geq f(c).$$

Viimeinen epäyhtälö johtuu siitä, että $f(c)$ on eräs alaraja joukolle $f((c,b))$.

Yhdistämällä yllä lasketut, saadaan että

$$\lim_{x\to c-} f(x) \leq f(c) \leq \lim_{x\to c+} f(x).$$

Ratkaisu 2 Koska f on kasvava välillä (a,b), niin joukko $f((a,c))$ on ylhäältä rajoitettu, eli funktiolla f on vasemmanpuoleinen raja-arvo kohdassa c. Olkoot tämä raja-arvo $d \in \mathbb{R}$. Jos olisi niin, että $d > f(c)$, niin $d - f(c) > 0$, joten funktion raja-arvon määritelmän nojalla

$$|f(x) - d| < d - f(c),$$

kun $c - \delta < x < c$, jollain $\delta > 0$. Oletuksesta $d > f(c)$, seuraa että $f(x) < d$, joten saadaan, että

$$d - f(x) < d - f(c),$$

josta seuraa, että

$$f(x) > f(c),$$

joka on funktion f kasvavuuden kanssa ristiriita. Siis $\lim_{x\to c-} f(x) \leq f(c)$. Toinen suunta on täysin analoginen.

Koska f on kasvava välillä (a,b), niin joukko $f((c,b))$ on alhaalta rajoitettu, eli funktiolla f on oikeanpuoleinen raja-arvo kohdassa c. Olkoot tämä raja-arvo $e \in \mathbb{R}$. Jos olisi niin, että $e < f(c)$, niin $f(c) - e > 0$, joten funktion raja-arvon määritelmän nojalla

$$|f(x) - e| < f(c) - e,$$

kun $c < x < c + \delta$, jollain $\delta > 0$. Oletuksesta $e < f(c)$, seuraa että $f(x) > e$, joten saadaan, että

$$f(x) - e < f(c) - e,$$

josta seuraa, että

$$f(x) < f(c),$$

joka on funktion f kasvavuuden kanssa ristiriita. Siis $\lim_{x\to c+} f(x) \geq f(c)$. Nyt tehtävän väite on todistettu.

K6 Oletetaan, että funktio $f : (1, 7) \to \mathbb{R}$ on derivoituva kohdassa $x = 2$. Oletetaan lisäksi, että $f(2) = 3$ ja $f'(2) = 4$. Osoita, että on olemassa sellainen $h > 0$, että kaikille $x \in (2, 2 + h)$ pätee

$$3 + (4 - \frac{1}{5})(x - 2) < f(x) < 3 + (4 + \frac{1}{5})(x - 2).$$

Ratkaisu Tarkastellaan aluksi itseisarvolauseketta joka halutaan näyttää, saadaan että

$$\begin{aligned}
& 3 + (4 - \frac{1}{5})(x - 2) < f(x) < 3 + (4 + \frac{1}{5})(x - 2) \\
\Leftrightarrow \quad & (4 - \frac{1}{5})(x - 2) < f(x) - 3 < (4 + \frac{1}{5})(x - 2) \\
\Leftrightarrow \quad & 4(x - 2) - \frac{1}{5}(x - 2) < f(x) - 3 < 4(x - 2) + \frac{1}{5}(x - 2) \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{5}(x - 2) < f(x) - 3 - 4(x - 2) < \frac{1}{5}(x - 2) \\
\Leftrightarrow \quad & -\frac{1}{5} < \frac{f(x) - 3 - 4(x - 2)}{x - 2} < \frac{1}{5} \\
\Leftrightarrow \quad & \left| \frac{f(x) - 3 - 4(x - 2)}{x - 2} \right| < \frac{1}{5}
\end{aligned}$$

kun $x > 2$. Näytämme seuraavaksi että yllä olevien laskelmien alin rivi pätee, ja täten jokainen muu.

Tehtävän oletuksista seuraa, että funktiolle f pätee, että

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 4,$$

eli että erotusosamäärän raja-arvo pisteessä 2 on olemassa. Täten valitsemalla $\epsilon = \frac{1}{5}$, pätee että on olemassa $h > 0$, siten että

$$\left| \frac{f(x) - 3}{x - 2} - 4 \right| < \frac{1}{5},$$

kun $x \in (2 - h, 2 + h)$. Kertomalla lukua 4, luvulla $1 = \frac{x-2}{x-2}$ (ei voi tulla 0:lla jakoa, sillä x ei voi olla 2) saadaan, että

$$\left| \frac{f(x) - 3 - 4(x - 2)}{x - 2} \right| < \frac{1}{5}.$$

Siis nyt näytetty että löytyy $h > 0$ siten, että jos $x \in (2, 2 + h)$, niin

$$\left| \frac{f(x) - 3 - 4(x - 2)}{x - 2} \right| < \frac{1}{5},$$

ja nyt aivan alussa tekemiemme laskelmien nojalla, tehtävän väite on todistettu.