MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Ratkaisuehdotukset alkuviikolle 37
Janne Leppä-aho

O1 Luvun x käänteisluku on sellainen yksikäsitteinen luku y, että $xy = 1$. Miksi luvulla 0 ei ole käänteislukua; ts. miksi nollalla ei saa jakaa?

Ratkaisu: Tehdään väitteelle vastaoletus ja yritetään johtaa tästä ristiriita.

Oletamme siis, että nollalla on käänteisluku. Toisin sanoen löytyy luku y, jolle $0 \cdot y = 1$. Nyt voimme johtaa ristiriidan esimerkiksi seuraavasti:

$$2 = 2 \cdot 1 = 2 \cdot (0 \cdot y) = (2 \cdot 0) \cdot y = 0 \cdot y = 1.$$

Siis mikäli vastaoletuksemme on totta, täytyisi päteä $2 = 1$, mikä on ristiriita. Vastaoletus on siis väärä ja alkuperäinen väite pätee.

O2 Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{n+2}{n^2+3} \leq \frac{3}{n}.$$

Vihje: käytä suuruusjärjestyksen ominaisuuksia. Mitä tapahtuu, jos vasemmalla puolella kasvatat osoittajaa ja pienennät nimittäjää?

Ratkaisu: Edetään vihjeen mukaan ja pienennetään ensin nimittäjää. Tällöin osamäärä siis kasvaa. Nimittäjässä on termi $n^2 + 3$, missä n on positiivinen kokonaisluku. Voimme pienentää nimittäjää jättämällä vakion 3 pois. Siis koska $n^2 + 3 \geq n^2$, niin

$$\frac{n+2}{n^2+3} \leq \frac{n+2}{n^2}.$$

Kasvatetaan nyt saadun murtolausekkeen osoittajaa, jolloin myös koko osamäärä kasvaa. Korvataan osoittajan vakio 2 luvulla $2n$. Tällöin osoittaja kasvaa (tai pysyy vähintäänkin samana), sillä luku n oli positiivinen kokonaisluku eli $n \geq 1$. Siis koska $n + 2 \leq n + 2n$, niin

$$\frac{n+2}{n^2} \leq \frac{n+2n}{n^2} = \frac{3n}{n^2} = \frac{3}{n}.$$

Saimme siis

$$\frac{n+2}{n^2+3} \leq \frac{3}{n}.$$

K1 Osoita, että $\sqrt[5]{3}$ on irrationaalinen. Voit mukailla luennoilla kerrattua todistusta sille, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen.

Ratkaisu: Todistetaan väite tekemällä vastaoletus, eli oletetaan, että $\sqrt[5]{3}$ on rationaalinen. Siis

$$\sqrt[5]{3} = \frac{m}{n},$$

missä $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ ja luvuilla m ja n **ei ole yhteisiä tekijöitä**. Korotetaan oletuksen yhtälö puolittain potenssiin 5. Saamme

$$\begin{aligned} \sqrt[5]{3} &= \frac{m}{n} \\ \Leftrightarrow (\sqrt[5]{3})^5 &= \left(\frac{m}{n}\right)^5 \\ \Leftrightarrow 3 &= \frac{m^5}{n^5} \\ \Leftrightarrow 3n^5 &= m^5 \end{aligned}$$

Saadun yhtälön vasen puoli on jaollinen luvulla kolme. Tästä seuraa, että myös luvun m^5 on oltava jaollinen kolmella. Koska m^5 on jaollinen kolmella, täytyy myös m:n olla jaollinen kolmella.[1] Toisin sanoen m voidaan kirjoittaa muodossa $m = 3k$, jollain kokonaisluvulla k. Sijoitetaan $m = 3k$ yhtälöön $3n^5 = m^5$. Saamme

$$3n^5 = (3k)^5$$

ja jakamalla puolittain luvulla kolme, saadaan

$$n^5 = 3^4 k^5.$$

Nyt huomaamme, että yhtälön oikea puoli on jaollinen kolmella. Tästä seuraa, että n^5 ja n ovat myös jaollisia kolmella. Löysimme luvuille m ja n yhteisen tekijän, eli luvun kolme. Tämä on ristiriita, joten vastaoletus on väärä ja alkuperäinen väite pätee.

[1] Tämä voidaan perustella esimerkiksi kursilla Algebra I todistettavan lauseen avulla: *Olkoon p alkuluku ja $a, b \in \mathbb{Z}$. Jos tulo ab on jaollinen p:llä, niin a tai b on jaollinen p:llä.*

K2 Onko
$$\frac{1+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}}$$
rationaalinen vai irrationaalinen?

Ratkaisu: Luku $(1+2\sqrt{2})/(3+4\sqrt{2})$ on irrationaalinen. Osoitetaan tämä tekemällä vastaoletus, eli että $(1+2\sqrt{2})/(3+4\sqrt{2})$ olisi rationaalinen. Siis oletamme, että
$$\frac{1+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}} = \frac{m}{n},$$
missä $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $n \neq 0$. Ratkaistaan yllä olevasta yhtälöstä $\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1+2\sqrt{2}}{3+4\sqrt{2}} &= \frac{m}{n} \\
\Leftrightarrow n(1+2\sqrt{2}) &= m(3+4\sqrt{2}) \\
\Leftrightarrow n+2n\sqrt{2} &= 3m+4m\sqrt{2} \\
\Leftrightarrow 2n\sqrt{2}-4m\sqrt{2} &= 3m-n \\
\Leftrightarrow \sqrt{2}(2n-4m) &= 3m-n \\
\Leftrightarrow \sqrt{2} &= \frac{3m-n}{2n-4m}
\end{aligned}$$

Tämä tarkoittaa, että $\sqrt{2}$ on rationaaliluku, sillä luvut $3m-n$ ja $2n-4m$ ovat kokonaislukuja. Tiedämme kuitenkin $\sqrt{2}$:n olevan irrationaaliluku. Saimme johdettua ristiriidan, joten vastaoletus on väärä ja alkuperäinen väite pätee.

K3 Onko $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ rationaalinen vai irrationaalinen?

Ratkaisu: Luku $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ on irrationaalinen. Osoitetaan tämä tekemällä vastaoletus, eli että $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ olisi rationaalinen. Siis
$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{m}{n},$$
missä $m, n \in \mathbb{Z}$ ja $n \neq 0$. Lähdetään muokkamaan yhtälöä.

$$
\begin{aligned}
\sqrt{2}+\sqrt{3} &= \frac{m}{n} \\
\Leftrightarrow \sqrt{3} &= \frac{m}{n}-\sqrt{2} \\
\Rightarrow (\sqrt{3})^2 &= \left(\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right)^2 \\
\Leftrightarrow 3 &= \frac{m^2}{n^2}-2\sqrt{2}\frac{m}{n}+2 \\
\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\frac{m}{n} &= \frac{m^2}{n^2}-1 \\
\Leftrightarrow \sqrt{2} &= \frac{n(m^2-n^2)}{2mn^2}
\end{aligned}
$$

Tämä tarkoittaa, että $\sqrt{2}$:n täytyisi olla rationaalikuku, sillä $n(m^2-n^2)$ sekä $2mn^2$ ovat kokonaislukuja. Kuitenkin tiedämme, että $\sqrt{2}$ on irrationaalinen. Saimme siis johdettua ristiriidan, joten vastaoletuksen on oltava väärä ja alkuperäinen väite pätee.