Loppuviikon mallit viikko 44 Analyysi
Katja Niemistö

03 Määritelmän mukaan funktio f on jatkuva kohdassa $x=9$ joss

$$\lim_{x \to 9} f(x) = f(9) .$$

Lasketaan funktion arvo kohdassa $x=9$:

$f(9) = \sqrt{9} = 3$.

Osoitetaan, että

$$\lim_{x \to 9} f(x) = 3 \quad :$$

Tutkitaan itseisarvoa

$$|f(x)-3| = |\sqrt{x} - 3| = \left| \frac{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)}{\sqrt{x}+3} \right|$$

$$= \left| \frac{x-9}{\sqrt{x}+3} \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right| \cdot |x-9| = \frac{1}{\sqrt{x}+3} |x-9|$$

$$\leq \frac{1}{3} |x-9|$$

Todistus:
Ol. $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{3\varepsilon, 1\}$. Ol. $0 < |x-9| < \delta$

Nyt $|f(x)-3| \leq \frac{1}{3}|x-9| < \frac{1}{3}\delta \leq \varepsilon$

Siis $\lim_{x \to 9} f(x) = 3 = f(9)$.

Siis funktio f on jatkuva kohdassa $x=9$.

$\square$

04 Derivaatan määritelmän mukaan

$f'(9) = \frac{1}{6}$ joss

$$\lim_{x \to 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \frac{1}{6}.$$

Osoitetaan siis kyseinen raja-arvo.

Tutkitaan itseisarvoa

$$\left| \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} - \frac{1}{6} \right| = \left| \frac{6f(x) - 6f(9)}{6(x-9)} - \frac{x-9}{6(x-9)} \right|$$

$$= \left| \frac{6\sqrt{x} - 6 \cdot 3 - x + 9}{6(x-9)} \right| = \left| \frac{-x + 6\sqrt{x} - 9}{6(x-9)} \right|$$

$$= \left| \frac{-(\sqrt{x} - 3)^2}{6(x-9)} \right| = \frac{1}{6} \left| \frac{(\sqrt{x} - 3)^2}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)} \right| = \frac{1}{6} \left| \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} + 3} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \left| \frac{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+3)^2} \right| = \frac{1}{6} \left| \frac{x - 9}{x + 6\sqrt{x} + 9} \right|$$

$$= \frac{1}{6} \frac{|x-9|}{x + 6\sqrt{x} + 9} \leq \frac{1}{6 \cdot 9} |x - 9| \leq |x-9|$$

Todistus:

Ol. $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{\varepsilon, 1\}$. Ol. $0 < |x-9| < \delta$

Nyt $\left| \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} - \frac{1}{6} \right| \leq |x - 9| < \delta \leq \varepsilon$.

Siis $\lim_{x \to 9} \frac{f(x) - f(9)}{x - 9} = \frac{1}{6}$

Siis $f'(9) = \frac{1}{6}$. $\square$

Määritelmän mukaan funktio f on jatkuva kohdassa $x=1$ joss

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) .$$

Lasketaan funktion arvo kohdassa $x=1$:

$$f(1) = 1^2 + 3\cdot 1 = 4 .$$

Osoitetaan määritelmää käyttäen, että $\lim_{x\to 1} f(x) = 4$:

Tutkitaan itseisarvoa

$$|f(x)-4| = |x^2+3x-4| = |(x-1)(x+4)|$$

$$= |x-1|\cdot|x+4| = |x-1|\cdot(x+4) \leq |x-1|\cdot(3+4)$$

$$= 7|x-1| \qquad \text{Ol. } 0<|x-1|<\delta$$

$$< 7\delta$$

Huomataan ekvivalenssi
$$7\delta \leq \varepsilon \iff \delta \leq \frac{\varepsilon}{7}$$

Todistus:

Ol. $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{7}\}$

Ol. $0<|x-1|<\delta$

Nyt $|f(x)-4| < 7\delta \leq \varepsilon$

Siis $\lim_{x\to 1} f(x) = 4 = f(1)$.

Siis funktio f on jatkuva kohdassa $x=1$.

$\square$

K5

Määritelmän mukaan funktio f on derivoituva kohdassa $x=0$ joss on olemassa raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}.$$

__Tapa 1__

Osoitetaan, että tällaista raja-arvoa ole, tekemällä vastaoletus:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = a$$, jossa $a \in \mathbb{R}$.

Nyt siis on olemassa $\delta > 0$, siten että kun $0 < |x-0| < \delta$, niin

$$\left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - a \right| < 1$$

eli

$$\left| \frac{|x|-|0|}{x} - a \right| < 1 \quad \text{eli} \quad \left| \frac{|x|}{x} - a \right| < 1$$

itseisarvolemman nojalla

$$-1 < \frac{|x|}{x} - a < 1$$. Tämä pätee siis kun $0<|x|<\delta$ eli kun $-\delta<x<0$ ja $0<x<\delta$

Siis

kun $-\delta<x<0$:	kun $0<x<\delta$:
$-1<-1-a<1$	$-1<1-a<1$
siis $a-1<-1$	$1<1+a$
siis $a<0$	$a>0$

K5 Eli $a<0$ ja $a>0$. Siis ristiriita.

Eli ei ole raja-arvoa $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$.

Eli f ei ole derivoituva kohdassa $x=0$.

Tapa 2

Osoitetaan, ettei ole tällaista raja-arvoa osoittamalla toispuoliset raja-arvot erisuuriksi.

Osoitetaan, että $\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -1$:

Ol. $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = 1$. Ol. $-\delta < x < 0$

Nyt $\left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - (-1) \right| = \left| \frac{|x|-|0|}{x} + 1 \right|$

$= \left| \frac{|x|}{x} + 1 \right| = \left| \frac{-x}{x} + 1 \right| = |-1+1| = 0 < \varepsilon$. $\boxtimes$

Osoitetaan, että $\lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$:

Ol. $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = 1$. Ol. $0 < x < \delta$

Nyt $\left| \frac{f(x)-f(0)}{x-0} - 1 \right| = \left| \frac{|x|-|0|}{x} - 1 \right| = \left| \frac{|x|}{x} - 1 \right|$

$= \left| \frac{x}{x} - 1 \right| = |1-1| = 0 < \varepsilon$. $\boxtimes$

Siis $\lim_{x \to 0-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \neq \lim_{x \to 0+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$

Lauseen 3.2.3 erotusosamäärän raja-arvoa ei ole olemassa.
Eli f ei ole derivoituva kohdassa $x=0$. $\square$

K6 Funktio g on derivoituva kohdassa $x=0$ joss raja-arvo

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} \quad \text{on olemassa.}$$

Osoitetaan, että

$$\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0 \quad :$$

Tutkitaan itseisarvoa

$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x-0} - 0\right| = \left|\frac{x^2 f(x) - 0^2 \cdot f(0)}{x}\right|$$

$$= \left|\frac{x^2 f(x)}{x}\right| = |x f(x)| = |x| \cdot |f(x)| \leq |x| \cdot 3$$

Todistus:

Ol. $\varepsilon > 0$. Valitaan $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$.

Ol. $0 < |x-0| < \delta$

Nyt

$$\left|\frac{g(x)-g(0)}{x-0} - 0\right| \leq |x| \cdot 3 = 3|x-0|$$

$$< 3\delta = \varepsilon.$$

Siis $\lim_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = 0$

Siis g on derivoituva kohdassa $x=0$. $\square$

(Lisäkysymys: valitaan $f = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{kun } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$)