**MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS**

**Analyysi I 2013**
**Tehtävät loppuviikolle 36**
**Ratkaisuehdotukset**

**O3** Vastaa seuraaviin kysymyksiin lukiotietojen pohjalta: Onko jatkuva funktio välttämättä derivoituva? Onko derivoituva funktio välttämättä jatkuva? Miten voisi perustella, että vastauksesi pitää paikkansa? Selatkaa oppimateriaalia (jos se jon on jollain mukana) ja yrittäkää löytää sieltä kohta, joka liittyy näihin kysymyksiin.

**Ratkaisu:** Funktion jatkuvuus on välttämätön, mutta ei riittävä ehto funktion derivoituvuudelle. Siis jatkuva funktio ei ole aina välttämättä derivoituva, mutta derivoituva funktio on aina jatkuva. Esimerkiksi itseisarvofunktio $f(x) = |x|$ on jatkuva kaikkialla, mutta ei derivoituva kohdassa $x = 0$.

**O4** Onko $6,999\ldots = 7$? Tässä $6,999\ldots$ tarkoittaa desimaalimerkintää, jossa numeroa 6 seuraa ääretömän monta kertaa numero 9. Mieti kysymystä ensin yksin. Selvittäkää sitten viittaamalla kuinka monesta paikalla olijasta yhtälö on epätosi ja kuinka monesta se on tosi. Esittäkää lopuksi perusteluja kummallekin näkemykselle.

**Ratkaisu:** Tehtävää voi pohtia sen tunnetummassa muodossa, eli päteekö $0,999\ldots = 1$. Väite on tosi ja se seuraa reaalilukujen täydellisyysaksioomasta, mutta sitä voi havainnollistaa myös muilla tavoilla. Tässä esimerkkinä algebrallinen todistus:

$$\begin{array}{rcl} x & = & 0,999\ldots \quad | \cdot 10 \\ 10x & = & 9,999\ldots \quad | - x \\ 10x - x & = & 9,999\ldots - 0,999\ldots \\ 9x & = & 9 \\ x & = & 1 \\ 0,999\ldots & = & 1 \end{array}$$

**K4** Kirjoita yhtälön muotoon seuraava väite: reaaliluvun $x$ kuutiojuuri on kaksi kertaa niin suuri kuin sen neliöjuuri. Mikä positiivinen luku toteuttaa tämän ehdon?

**Ratkaisu:**

$$\sqrt[3]{x} = 2\sqrt{x}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Selvitetään sitten, mikä positiivinen luku toteuttaa tämän yhtälön. Nyt siis $x > 0$, joten voimme jakaa x:llä. Esitetään juuret murtolukumuodossa.

$$\sqrt[3]{x} = 2\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x^{\frac{1}{3}} = 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2 = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} = x^{\frac{2}{6}-\frac{3}{6}} = x^{-\frac{1}{6}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{x}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \sqrt[6]{x} \quad \Leftrightarrow \quad x = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Tarkistetaan vielä, että tämä luku toteuttaa yhtälön. $\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} = 2\sqrt{\frac{1}{64}}$, joten yhtälön toteuttava positiivinen luku on $x = \frac{1}{64}$.

**K5** Palauta mieleen se, miten funktion raja-arvo ja jatkuvuus määritellään lukiossa. (Jos lukion oppikirjasi on tavoitettavissa, niin tarkista asia sieltä.) Mikä määritelmässä tuntuu nyt oikealta? Mikä vaatii tarkennusta? Etsi vastaavat määritelmät kurssimme monisteesta. Löytyykö tuttuja piirteitä?

**Ratkaisu:** Funktion $f$ vasemmanpuolinen raja-arvo kohdassa $x_0$ on $a$, kun funktion arvot $f(x)$ lähestyvät lukua $a$, kun muuttuja $x$ lähestyy kohtaa $x_0$ vasemmalta ($x < x_0$). Tätä merkitään $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = a$. Vastaavasti, funktion $f$ oikeanpuolinen raja-arvo kohdassa $x_0$ on $b$, kun funktion arvot $f(x)$ lähestyvät lukua $b$, kun muuttuja $x$ lähestyy kohtaa $x_0$ oikealta ($x > x_0$). Tätä merkitään $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = b$. Funktion $f$ raja-arvo kohdassa $x_0$ on $c$, kun funktion vasemmanpuolinen raja-arvo kohdassa $x_0$ on $c$ ja oikeanpuolinen raja-arvo kohdassa $x_0$ on $c$. Tätä merkitään $\lim_{x \to x_0} f(x) = c$. Siis

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = c \text{ ja } \lim_{x \to x_0^+} f(x) = c$$

Funktio on vasemmalta jatkuva kohdassa $x_0$, kun vasemmanpuolinen raja-arvo kohdassa $x_0$ on yhtä suuri kuin funktion arvo kohdassa $x_0$. Vastaavasti, funktio on oikealta jatkuva kohdassa $x_0$, kun oikeanpuolinen raja-arvo kohdassa $x_0$ on yhtä suuri kuin funktion arvo kohdassa $x_0$. Funktio $f$ on jatkuva kohdassa $x_0$, kun $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$, eli kun funktion toispuoliset raja-arvot kohdassa $x_0$ ja funktion arvo kohdassa $x_0$ ovat yhtä suuret.

**K6** Tarkastellaan seuraavaa reaalilukua $a$ koskevaa väitettä ja sille esitettyä todistusta.

Väite: Jos luku $a$ on jaollinen luvulla 3, niin se on jaollinen myös luvulla 9.

Todistus: Oletetaan, että $a$ on jaollinen luvulla 9. Tällöin jollain kokonaisluvulla $b$ pätee yhtälö $a = 9b$. Tästä seuraa, että $a = 3 \cdot (3b)$, joten luku $a$ on jaollinen luvulla 3.

Onko todistus kunnossa vai onko siinä jotain pielessä? Minkä väitteen todistus osoittaa oikeaksi?

**Ratkaisu:** Todistus ei ole kunnossa. Väite on implikaatio, eli muotoa $A \Rightarrow B$ (väitteestä A seuraa väite B), mutta todistus on tehty väärään suuntaan, eli on oletettu väitteen lopputulos (B) ja todistettu sen avulla väitteen oletus (A), eli todistettu $B \Rightarrow A$. Todistus osoittaa siis seuraavan väitteen: jos luku $a$ on jaollinen luvulla 9, niin se on jaollinen myös luvulla 3. Alkuperäinen väite on epätosi, mikä voidaan todistaa vastaesimerkillä. Valitaan $a = 3$. Nyt $a$ on jaollinen luvulla 3, mutta ei luvulla 9.