# Analyysi 1 vko47
# alkuviikon ratkaisuehdotukset

Sakari Patana

November 20, 2013

**O1** Määritellään $f(x) = x^2$. Osoita, että kaikilla $h$ pätee

$$f(3+h) = f(3) + 6h + h^2.$$

Miten tästä yhtälöstä voi suoraan päätellä derivaatan $f'(3)$?

**Ratkaisu:** Kirjoitetaan funktion $f$ arvo pisteessä $x = 3 + h$. Saamme

$$f(3+h) = (3+h)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3h + h^2 = f(3) + 6h + h^2,$$

siis funktion $f$ arvo pisteessä $x = 3+h$ voidaan kirjoittaa haluttuun muotoon.

Tästä lausekkeesta voidaan suoraan päätellä funktion $f$ derivoituvuus ja derivaatan arvo kun $x = 3$, sillä lemmojen **5.2.9** ja **5.2.10** nojalla funktio $f$ on derivoituva pisteessä $x_0$ jos ja vain jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + hu(h),$$

missä $\lim_{h\to 0} u(h) = 0 = u(0)$. Tehtävän funktiolla $x_0 = 3$, lauseke $u(h) = h$ ja $f'(3) = 6$

**O2** Tarkastellaan edellisen tehtävän funktiota. Esitä arvo $f(3+h)$ muodossa

$$f(3+h) = f(3) + 7h + hg(h).$$

Onko tulos ristiriidassa kurssin lauseiden (tarkemmin: sivun 82 lemman 5.2.9) kanssa?

**Ratkaisu:**

Yritetään kirjoittaa yhtälö halutussa muodossa

$$f(3+h) = f(3)+6h+h^2 = f(3)+7h+h^2-h = f(3)+7h+h(h-1) = f(3)+7h+hg(h),$$

kun määritellään $g(h) = h - 1$.

Lemmojen **5.2.9** ja **5.2.10** mukaan funktio $f$ on derivoituva pisteessä $x_0$ jos ja vain jos se voidaan kirjoittaa muodossa

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + hu(h),$$

missä $\lim_{h\to 0} u(h) = 0 = u(0)$.

Tiedetään kuitenkin, että funktion derivaatta tietyssä pisteessä on yksikäsitteinen. Siis ei voi päteä $f'(3) = 7 \neq 6$. Tarkastelemalla lemmaa ja lauseketta

$$f(3 + h) = f(3) + 7h + hg(h)$$

havaitsemme kuitenkin, että funktio $g(h) = h - 1$ ei toteuta lemman ehtoa

$$\lim_{h\to 0} g(h) = 0 = g(0),$$

sillä $g(0) = 0 - 1 = -1 \neq 0$. Siis lauseke ei ole ristiriidassa lemmojen **5.2.9** ja **5.2.10** kanssa.

**K1** Derivoi
(a) $\cos^2(x^5)$;
(b) $\sin^4(\cos^2(x^5))$;
(c) $\sqrt{\sin^4(\cos^2(x^5))}$.

Tehtävässä on tarkoitus harjoitella yhdistetyn funktion derivointisääntöä. Kaikkia koulusta tuttuja derivointisääntöjä saa käyttää tässä tehtävässä.

**Ratkaisu:**

Tässä tehtävässä sovelletaan jo lukiostakin tuttua derivoinnin ketjusääntöä. Täytyy kuitenkin olla tarkkana, sillä nyt "sisäkkäisiä" funktioita on useampia ja huolimattomuusvirheitä tulee helposti. Derivointi (b)- ja (c)-kohdissa helpottuu, kun huomaa, että sisäfunktiona esiintyy aiemman kohdan funktio, joka on jo derivoitu.

(a)

$$\begin{aligned} D(\cos^2 x^5) &= D(\cos x^5)^2 = 2(\cos x^5)(D\cos x^5) \\ &= 2(\cos x^5)(-\sin x^5)(Dx^5) = 2(\cos x^5)(-\sin x^5)(5x^4) \\ &= -10x^4(\cos x^5)(\sin x^5). \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} D(\sin^4(\cos^2 x^5) &= 4\sin^3(\cos^2 x^5)(D\sin(\cos^2 x^5)) \\ &= 4\sin^3(\cos^2 x^5)\cos(\cos^2 x^5)\underbrace{D\cos^2 x^5}_{\text{a-kohta}} \\ &= 4\sin^3(\cos^2 x^5)\cos(\cos^2 x^5)(-10x^4(\cos x^5)(\sin x^5)) \\ &= -40x^4\cos(\cos^2 x^5)\cos x^5\sin^3(\cos^2 x^5)\sin x^5 \end{aligned}$$

(c)

$$
\begin{aligned}
D\sqrt{\sin^4(\cos^2 x^5)} &= D(\sin^4(\cos^2 x^5))^{\frac{1}{2}} \\
&= \frac{1}{2}(\sin^4(\cos^2 x^5))^{-\frac{1}{2}}\underbrace{D(\sin^4(\cos^2 x^5))}_{\text{(b)-kohta}} \\
&= \frac{-40x^4\cos(\cos^2 x^5)\cos x^5\sin^3(\cos^2 x^5)\sin x^5}{2\sqrt{\sin^4(\cos^2 x^5)}}
\end{aligned}
$$

**K2** Määritellään funktio $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ehdolla $f(x) = |x|^3$. Millä $x$ on olemassa derivaatta $f'(x)$? Entä toinen derivaatta $f''(x)$? Entä kolmas derivaatta $f'''(x)$?

**Ratkaisu:**

Ensimmäisen derivaatan kohdalla tutkittavia tapauksia on kolme.

Kun $x > 0$, kaikille $x_0$ on olemassa $h > 0$, siten että $(x_0-h, x_0+h)\epsilon(0,\infty)$, ja näin $f(x) = |x|^3 = x^3$, joten $f'(x) = 3x^2$

Kun $x < 0$, kaikille $x_0$ on olemassa $h > 0$, siten että $(x_0 - h, x_0 + h)\epsilon(-\infty, 0)$, ja näin $f(x) = |x|^3 = -x^3$, joten $f'(x) = -3x^2$

Kun $x = 0$ joudumme tutkimaan erotusosamäärän raja-arvoa. Saadaan

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{|x|^3 - 0}{x - 0} = \frac{x^2|x|}{x} = x|x|.$$

Siis

$$\lim_{x\to 0} x|x| = 0.$$

Ja täten $f'(0) = 0$

Seuraavaksi tutkitaan toista derivaattaa. Jälleen tutkittavana on kolme tapausta.

Kun $x > 0$, kaikille $x_0$ on olemassa $h > 0$, siten että $(x_0-h, x_0+h)\epsilon(0,\infty)$, ja näin $f'(x) = 3x^2$, joten $f''(x) = 6x$

Kun $x < 0$, kaikille $x_0$ on olemassa $h > 0$, siten että $(x_0 - h, x_0 + h)\epsilon(-\infty, 0)$, ja näin $f'(x) = -3x^2$, joten $f''(x) = -6x$

Kun $x = 0$, tutkitaan jälleen erotusosamäärän raja-arvoa. Saadaan

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{f'(x)}{x},$$

josta tutkitaan toispuoleiset raja-arvot.

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{-3x^2}{x} = \lim_{x\to 0^-} -3x = 0.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} 3x = 0.$$

Siis $f''(0) = 0$

Seuraavaksi tutkitaan kolmatta derivaattaa. Edelleen tutkittavana kolme tapausta.

Kun $x > 0$, kaikille $x_0$ on olemassa $h > 0$, siten että $(x_0 - h, x_0 + h)\epsilon(0, \infty)$, ja näin $f''(x) = 6x$, joten $f'''(x) = 6$

Kun $x < 0$, kaikille $x_0$ on olemassa $h > 0$, siten että $(x_0 - h, x_0 + h)\epsilon(-\infty, 0)$, ja näin $f''(x) = -6x$,joten $f'''(x) = -6$

Kun $x = 0$ tutkitaan jälleen erotusosamäärän raja-arvoa. Saadaan

$$\frac{f''(x) - f''(0)}{x - 0} = \frac{f''(x)}{x},$$

josta tutkitaan jälleen toispuoleiset raja-arvot.

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f''(x)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-6x}{x} = \lim_{x\to 0^-} -6 = -6.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f''(x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 6 = 6.$$

Toispuoleiset raja-arvot eivät ole samat. Funktion kolmas derivaatta $f'''(x)$ ei siis ole olemassa kun $x = 0$. Tämän voi arvata jo, kun funktion toisen derivaatan kuvaajan piirtää, sillä kohtaan $x = 0$ muodostuu "piikki".

**K3** Oletetaan, että $f'(2) = 3$. Selvitä

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2 + 4h) - f(2 - h)}{5h}.$$

Kannattaa vähentää ja lisätä osoittajaan lauseke $f(2)$.

**Ratkaisu:**

Noudatetaan vihjettä ja lähdetään muokkaamaan lauseketta. Kiinnitetään huomiota erityisesti siihen, että erotusosamäärän raja-arvon lauseke pätee ihan yhtä hyvin oli siinä esiintyvä $h$ sitten $h$, tai vaikka $-3h$, kunhan se sama esiintyy sekä osoittajassa, että nimittäjässä oikealla paikallaan.

$$\begin{aligned}
\frac{f(2 + 4h) - f(2 - h)}{5h} &= \frac{f(2 + 4h) - f(2) + f(2) - f(2 - h))}{5h} \\
&= \frac{f(2 + 4h) - f(2)}{5h} - \frac{f(2 - h) - f(2)}{5h} \\
&= \frac{4}{5}\frac{f(2 + 4h) - f(2)}{4h} + \frac{1}{5}\frac{f(2 + (-h)) - f(2)}{-h}.
\end{aligned}$$

Koska tiedetään, että $f'(2) = 3$, tiedetään myös että

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2+4h)-f(2)}{4h} = \lim_{4h\to 0} \frac{f(2+4h)-f(2)}{4h} = 3,$$

ja että

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} = \lim_{-h\to 0} \frac{f(2-h)-f(2)}{-h} = 3.$$

Nämä raja-arvomerkinnät $\lim 4h \to 0$ ja $\lim -h \to 0$ ovat merkitty vain tilanteen selkeyttämiseksi, ja jotta lauseke näyttäisi vielä enemmän monisteessa sivulla 75 olevalta lausekkeelta.

Koska raja-arvot näille lausekkeille ovat olemassa

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(2+4h)-f(2-h)}{5h} &= \lim_{h\to 0} \frac{4}{5}\frac{f(2+4h)-f(2)}{4h} + \frac{1}{5}\frac{f(2+(-h))-f(2)}{-h} \\
&= \frac{4}{5}3 + \frac{1}{5}3 = \frac{15}{5} = 3
\end{aligned}$$