MATEMATIIKAN JA TILASTOTIETEEN LAITOS

Analyysi I 2013
Ratkaisuehdotukset loppuviikolle 37
Ville Liimo

O3 Onko $\sqrt[3]{3} + \sqrt{3}$ rationaalinen vai irrationaalinen?
Ratkaisu: $\sqrt[3]{3} + \sqrt{3}$ on irrationaalinen. Todistetaan tämä tekemällä vastaoletus, että luku on rationaalinen. Tällöin

$$\sqrt[3]{3} + \sqrt{3} = \frac{m}{n}$$

missä m ja n ovat kokonaislukuja ja $n \neq 0$. Ratkaistaan yhtälö $\sqrt{3}$ suhteen

$$\begin{aligned}
\sqrt[3]{3} + \sqrt{3} &= \frac{m}{n} \\
\Leftrightarrow \sqrt[3]{3} &= \frac{m}{n} - \sqrt{3} \\
\Leftrightarrow (\sqrt[3]{3}n)^3 &= (m - \sqrt{3}n)^3 \\
\Leftrightarrow 3n^3 &= m^3 - 3m^2\sqrt{3}n + 3m3n^2 - (\sqrt{3}n)^3 \\
&= m^3 - 3m^2n\sqrt{3} + 9mn^2 - 3n^3\sqrt{3} \\
\Leftrightarrow 3m^2n\sqrt{3} + 3n^3\sqrt{3} &= m^3 + 9mn^2 - 3n^3 \\
\Leftrightarrow \sqrt{3}(3m^2n + 3n^3) &= m^3 + 9mn^2 - 3n^3 \\
\Leftrightarrow \sqrt{3} &= \frac{m^3 + 9mn^2 - 3n^3}{3m^2n + 3n^3}
\end{aligned}$$

Koska osoittaja $m^3 + 9mn^2 - 3n^3$ ja nimittäjä $3m^2n + 3n^3$ ovat selvästi kokonaislukuja, on $\sqrt{3}$ vastaoletuksesta edetyn päättelyketjun mukaan rationaalinen. Tämä on ristiita, sillä edellisten tehtävien perusteella $\sqrt{3}$ on irrationaalinen. Täten alkuperäinen väite (eli se, että $\sqrt[3]{3} + \sqrt{3}$ on irrationaalinen) pätee.

O4 (a) Oletetaan, että $0 < x < y$. Osoita, että $< x^2 < y^2$ (b) Oletetaan, että $1 < x$. Onko $x^3 < x^7$?
Ratkaisu: Jos luvut a, b ja c ovat mielivaltaisia reaalilukuja ja $a < b$ sekä $c > 0$ niin selkeästi $ca < cb$. Täten

(a) Koska $0 < x < y$, niin

$$x^2 = xx < xy < yy = y^2$$

(b)Koska $1 < x$, niin

$$1 \cdot x < xx = x^2 < x(x^2) = x^3 < x(x^3) = x^4 < x(x^5) = x^6 < x(x^6) = x^7$$

K4 Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{5}{4}$$

Ratkaisu: Pyritään sopivasti arvioimaan epäyhtälön vasenta puolta ylöspäin. Arvioidaan ensiksi nimittäjää alaspäin. Nyt $4n+5 \geq 4n$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n, sillä $n \geq 1$. Tällöin

$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{2n+3}{4n}$$

Arvioidaan sitten osoittajaa ylöspäin. Selkeästi kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n pätee $2n+3 \leq 2n+3n = 5n$. Arvioiden avulla voidaan siis päätellä, että

$$\frac{2n+3}{4n+5} \leq \frac{2n+3}{4n} \leq \frac{2n+3n}{4n} = \frac{5n}{4n} = \frac{5}{4}$$

K5 Oletetaan, että n on positiivinen kokonaisluku. Osoita, että

$$\frac{2n+3}{4n+5} \geq \frac{2}{9}$$

Ratkaisu: Arvioidaan murtolauseketta sopivasti alaspäin. Tämä tehdään arvioimalla osoittajaa alaspäin ja nimittäjää ylöspäin. Nyt osoittajalle pätee $2n+3 \geq 2n$ kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla n. Nimittäjälle pätee seuraava arvio $4n+5 \leq 4n+5n = 9n$, sillä $n \geq 1$. Siis

$$\frac{2n+3}{4n+5} \geq \frac{2n}{9n} = \frac{2}{9}$$

K6 (a) Laske erotus

$$\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2}$$

ja osoita, että se on positiivinen.
Ratkaisu: Olkoon n positiivinen kokonaisluku. Lasketaan ensiksi erotus

$$\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2} = \frac{2(2n+3)}{2(4n+5)} - \frac{4n+5}{2(4n+5)} = \frac{4n+6-(4n+5)}{8n+10} = \frac{1}{8n+10}$$

Arvioidaan erotusta alaspäin

$$\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8n+10} \geq \frac{1}{18n} > 0$$

Siis erotus positiivinen.

(b) Oletetaan, että $n > 10^{100}$. Osoita, että

$$\frac{1}{2} < \frac{2n+3}{4n+5} < \frac{1}{2} + 10^{-100}$$

Ratkaisu: (a)-kohdan perusteella

$$\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{2n+3}{4n+5}$$

Arvioidaan (a)-kohdan erotusta vielä ylöspäin

$$\frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8n+10} \leq \frac{1}{8n} < \frac{1}{n} < \frac{1}{10^{100}} = 10^{-100}$$

kun $n > 10^{100}$.

Täten erotukselle pätee arvio

$$0 < \frac{2n+3}{4n+5} - \frac{1}{2} < 10^{-100}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \frac{2n+3}{4n+5} < \frac{1}{2} + 10^{-100}$$