Analyysi
alkuviikko 38
Mallit
Katja Niemistö

01 $|x-7|<3^{17}$ tarkoittaa, että x:n etäisyys seitsemästä on pienempi kuin 3^{17}.
Siis $7-3^{17}<x<7+3^{17}$.

Todistus:

$|x-7|<3^{17}$

itseisarvolemman nojalla:

$-3^{17}<x-7<3^{17}$

eli $7-3^{17}<x<7+3^{17}$

Siis luvut, jotka kuuluvat välille $]7-3^{17}, 7+3^{17}[$ toteuttavat epäyhtälön. $\square$

02 $|2x-8|<3^{17}$

itseisarvolemman nojalla

$-3^{17}<2x-8<3^{17}$

eli $8-3^{17}<2x<8+3^{17}$

eli $4-\frac{3^{17}}{2}<x<4+\frac{3^{17}}{2}$

Siis luvut, jotka kuuluvat välille $]4-\frac{3^{17}}{2}, 4+\frac{3^{17}}{2}[$ toteuttavat epäyhtälön.

K1 $x \in]1,3[$

$0 \leq |x^2-4| = |x^2-2^2|$

$= |(x+2)(x-2)| = |x+2||x-2|$

kaikilla $a,b \in \mathbb{R}$
$|ab| = |a||b|$
(todistetaan tehtävässä K4)

$= (x+2)|x-2| \leq (3+2)|x-2|$

$= 5|x-2|$

Siis $|x^2-4| \leq 5|x-2|$

Siis voidaan valita $K=5$.

(Huom luku K voidaan valita monella tavalla, erityisesti jok'ikinen $K \geq 5$ on toimiva valinta.)

K2 $x \in]1,3[$

$0 \leq |x^3-8| = |x^3-2^3|$

$= |(x^2+2x+4)(x-2)|$

kaikilla $a,b \in \mathbb{R}$
$|ab| = |a||b|$
(todistetaan tehtävässä K4)

$= |x^2+2x+4||x-2|$

$= (x^2+2x+4)|x-2|$

$\leq (9+6+4)|x-2|$

$= 19|x-2|$

Siis $|x^3-8| \leq 19|x-2|$

Siis voidaan valita $K=19$.

(Huom luku K voidaan valita monella tavalla, erityisesti jok'ikinen $K \geq 19$ on toimiva valinta.)

K3 a. Kaikki luvut väliltä $[15,145; 15,155[$ pyöristyvät lukuun 15,15.

b.
$$|x-e^e|<2^{-1}\cdot 10^{-3}$$

eli $|x-e^e|<0{,}0005$

itseisarvolemma

eli $-0{,}0005<x-e^e<0{,}0005$

eli $e^e-0{,}0005<x<0{,}0005+e^e$

eli $x>e^e-0{,}0005\geq 15{,}1542-0{,}0005=15{,}1537$

ja $x<e^e+0{,}0005\leq 15{,}15427+0{,}0005=15{,}15477$

siis $15{,}1537<x<15{,}15477$

siis $x$in desimaalikehitelmä alkaa: 15,15

c. b-kohdassa huomattiin kahden ensimmäisen desimaalin olevan samoja, kun $|x-e^e|<2^{-1}\cdot 10^{-3}$. Jos $|x-e^e|<2^{-1}\cdot 10^{-4}$, huomataan luvuilla x ja e^e olevan kolme ensimmäistä desimaalia samat. Vastaavasti jos $|x-e^e|<2^{-1}\cdot 10^{-10}$, luvuilla x ja e^e on yhdeksän ensimmäistä desimaalia samat.