Analyysi I, vko48 syksy 2013

Alkuviikon tehtävät O1, O2; K1, K2 ja K3

Tehtävä. ***O1*** *Etsi monisteesta lokaalin ääriarvon määritelmä. Selvitä yhtälöllä* $f(x) = x^2 - 3x + 1$ *määritellyn funktion* $f\colon [-1,3] \to \mathbb{R}$ *lokaalit ääriarvot. Miten väliarvolause (ja sen seuraukset) liittyy tuloksen perusteluun?*

Ääriarvojen määritelmä löytyy Harjulehto/Klén/Koskenoja luentomonisteesta sivulta 94.
Olkoon $f\colon [-1,3] \to \mathbb{R}$, määritelty kaavalla $f(x) = x^2 - 3x + 1$. Kuvaus f on polynomifunktio, joten se on derivoituva reaalilukujen joukossa. Erityisesti se on derivoituva välillä $(-1,3)$, oikealta pisteessä -1 ja vasemmalta pisteessä 3. Eli se on derivoituva koko määrittelyjoukossaan. Tällöin sen derivaatta pisteessä $x \in [-1,3]$ on

$$f'(x) = 2x - 3.$$

Huomataan, että $f'(x) < 0$, kaikilla $x \in (-1,3/2)$. Toisaalta $f'(x) > 0$, kaikilla $x \in (3/2,3)$. Tällöin lauseen 5.3.10 nojalla f on aidosti vähenevä välillä $[-1,3/2]$ ja aidosti kasvava välillä $[3/2,3]$. Aidon vähenevyyden nojalla kaikilla $x \in [-1,3/2)$ pätee $f(x) > f(3/2)$. Lisäksi aidon kasvavuuden nojalla kaikilla $x \in (3/2,3]$ pätee $f(x) > f(3/2)$. Erityisesti pätee

$$f(3/2) \leq f(x), \text{ kaikilla } x \in [-1,3]\,.$$

Oletetaan, että $x_0 \in [-1,3]$. Oletetaan lisäksi, että $x_0 \neq 1$, $x_0 \neq 3/2$ ja $x_0 \neq 3$. Valitsemalla mielekkään luvun $\delta > 0$ voimme aidon kasvavuuden tai vähenevyyden perusteella sanoa: On olemassa sellaiset $x_1, x_2 \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, että $f(x_1) < f(x_0) < f(x_2)$. Täten funktiolla f ei ole pisteessä x_0 määritelmän mukaista ääriarvokohtaa. Mutta pisteet -1, $3/2$ ja 3 ovat siis määritelmän mukaisia ääriarvokohtia. Ääriarvot ovat laskettu alla:

$$
\begin{aligned}
f(-1) &= 1+3+1 = 5 \\
f\left(\frac{3}{2}\right) &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\cdot\frac{3}{2} + 1 = \frac{9}{4} - \frac{18}{4} + 1 = -\frac{5}{4} \\
f(3) &= 9-9+1 = 1
\end{aligned}
$$

Todistuksessa käytetty lause on luentomonisteessa todistettu lauseella 5.3.9, mikä on puolestaan johdettu suoraan väliarvolauseesta.

Tehtävä. ***O2*** *Oletetaan, että* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *on jatkuva ja että se on derivoituva välillä* $(0,1)$. *Oletetaan lisäksi, että* $f(0) = 3$.

(a) Oletetaan, että kaikilla $x \in (0,1)$ *pätee* $0 \le f'(x) \le 1$. *Mitä tämän perusteella voit sanoa arvosta* $f(1)$*?*

(b) Oletetaan, että kaikilla $x \in (0,1)$ *pätee* $0 \le f'(x) \le x^4$. *Mitä tämän perusteella voit sanoa arvosta* $f(1)$*? Ylärajan määrittämisessä kannattaa soveltaa väliarvolausetta yhtälällä* $g(x) = \frac{1}{5}x^5 - f(x)$ *määriteltyyn apufunktioon.*

(a) Koska f jatkuva suljetulla välillä $[0,1]$, derivoituva avoimella välillä $(0,1)$ ja lisäksi $f'(x) \le 1$ kaikilla $x \in (0,1)$, niin korollaarin 5.3.8 nojalla pätee

$$f(x) \le f(0) + 1\cdot(x-0) = f(0) + x, \qquad \text{kaikilla } x \in [0,1]$$

Joten voimme sanoa, että

$$f(1) \le f(0) + 1.$$

Oletusten nojalla pätee myös, että $0 \le f'(x)$ kaikilla $x \in [0,1]$. Saman korollaarin nojalla pätee myös, että

$$f(x) \ge f(0) + 0\cdot(x-0) = f(0), \qquad \text{kaikilla } x \in [0,1]\,.$$

Joten voimme myös sanoa, että

$$f(1) \ge f(0).$$

Yhdistämällä edelliset tulokset pääsemme seuraavaan johtopäätökseen:

$$f(0) \le f(1) \le f(0) + 1.$$

Koska $f(0) = 3$, niin

$$3 \leq f(1) \leq 4.$$

(b) Haluaisimme käyttää uudestaan korollaaria 5.3.8. Derivaatan alaraja on vakio ja jo valmiiksi käsitelty a-kohdassa, mutta yläraja ei ole vakio. Joudumme käyttämään hyväksi tehtävänannon vihjettä. Toteamme ensin vihjeen soveltamisen mielekkyyden. Määrittelemme $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ yhtälöllä $g(x) = x^5/5 - f(x)$. Koska $x^5/5$ on polynomi, on se jatkuva ja derivoituva halutuilla väleillä. Täten g on kahden jatkuvan ja derivoituvan funktion summana myös jatkuva ja derivoituva halutuilla väleillä. Voimme siis käyttää korollaaria funktiolle g. Derivoimalla näemme, että

$$0 \leq g'(x) = x^4 - f'(x) \leq x^4.$$

Myöskään funktion g derivaatan yläraja ei ole vakio, mutta tietyllä silmällä voi nähdä, että avain ratkaisuun on tämän derivaatan alaraja. Sovelletaan siis korollaaria 5.3.8. alarajaan:

$$g(x) \geq g(0) + 0(x - 0) = g(0), \text{ kaikilla } x \in [0,1]\,.$$

Täten pätee myös seuraavaa:

$$\frac{1}{5} \cdot 1^5 - f(1) = g(1) \geq g(0) = 0 - f(0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5} - f(1) \geq -f(0)$$

$$\Rightarrow f(1) \leq f(0) + \frac{1}{5}$$

Yhdistämällä tämän a-kohdan tietoon alarajasta samme lopulta:

$$f(0) \leq f(1) \leq f(0) + \frac{1}{5}.$$

Koska $f(0) = 3$, niin

$$3 \leq f(1) \leq \frac{16}{5}.$$

Tehtävä. ***K1*** *Tarkastellaan funktiota $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, joka on määritelty yhtälöllä $f(x) = x^3$. Etsi väliarvolauseessa mainittu piste $\xi \in (0,1)$. Miten tulos liittyy siihen, että väliarvolause ei voisi olla totta, jos meillä olisi vain rationaaliluvut?*

Polynomifunktiona f on jatkuva välillä $[0,1]$ ja derivoituva välillä $(0,1)$. Syötämme lukuja väliarvolauseen lausekkeeseen:

$$\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{1^3-0^3}{1-0} = 1.$$

Väliarvolause sanoo, että on olemassa sellainen $\xi \in (0,1)$, että $f'(\xi) = 1$. Lähdemme siis ratkaisemaan yhtälöä $f'(x) = 1$.

$$\begin{aligned} & f'(x) = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 3x^2 = 1 \\ \Leftrightarrow \quad & x = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Löysimme siis $\xi = 1/\sqrt{3}$, mikä ei ole rationaaliluku. Jos meillä olisi vain rationaaliluvut, niin väliarvolause ei voisi antaa lukua ξ tämän tehtävän tapauksessa. Itseasiassa meillä ei olisi väliarvolausettakaan.

Tehtävä. ***K2*** *Tarkastellaan jatkuvaa funktiota* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *joka toteuttaa kaikilla* $x \in (0,1)$ *ehdon* $-2 \leq f'(x) \leq 1$. *Mitä tämän perusteella voi sanoa arvosta* $f(1)$, *jos tiedetään, että* $f(0) = 7$?

Merkintä $f'(x_0)$ tarkoittaa erotusosamäärän raja-arvoa pisteessä x_0. Koska tämä raja-arvo on olemassa jokaisella $x \in (0,1)$ ja on erityisesti äärellinen, niin f on derivoituva välillä $(0,1)$. Täten väliarvolauseen oletukset ovat voimassa. Väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi \in (0,1)$, jolle

$$f'(\xi) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f(1) - 7.$$

Tällöin on siis voimassa $f(1) = f'(\xi) + 7$. Oletusten nojalla $-2 \leq f'(\xi) \leq 1$. Joten

$$f(1) = f'(\xi) + 7 \leq 1 + 7 = 8,$$

$$f(1) = f'(\xi) + 7 \geq -2 + 7 = 5$$

ja edelleen

$$5 \leq f(1) \leq 8.$$

Tehtävä. ***K3*** *Tarkastellaan jatkuvaa funktiota* $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, *joka toteuttaa kaikilla* $x \in (0,1)$ *ehdon* $-2 \leq f'(x) \leq 1$. *Mitä tämän perusteella voi sanoa arvosta* $f(0)$, *jos tiedetään, että* $f(1) = 7$*?*

Kuten tehtävässä K2, väliarvolauseen oletukset ovat voimassa. Väliarvolauseen nojalla on olemassa $\xi \in (0,1)$, jolle

$$f'(\xi) = \frac{f(1) - f(0)}{1 - 0} = 7 - f(0).$$

Tällöin on siis voimassa $f(0) = 7 - f'(\xi)$. Oletusten nojalla $-2 \leq f'(\xi) \leq 1$. Joten

$$f(0) = 7 - f'(\xi) \leq 7 - (-2) = 9,$$

$$f(0) = 7 - f'(\xi) \geq 7 - 1 = 6,$$

ja edelleen

$$6 \leq f(0) \leq 9.$$